Gxd 21

00052064

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

BOMBAY BRANCH
OF THE
ROYAL ASIATIC SOCIETY
TOWN HALL, BOMBAY.

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 25 June, 2016

Liber Bibliothecæ Mathematicæ Jac. Skene .. 1795 Lond....

RENATI FRANCISCI SLUSII

MESOLABUM

SEU

DUÆ MEDIÆ PROPORTIONALES

INTER EXTREMAS DATAS PER CIRCULUM

52064

ET PER

INFINITAS HYPERBOLAS,

VEL ELLIPSES

ET PER QUAMLIBET EXHIBITÆ,

Ac Problematum omnium ſolidorum effectio per eaſdem curvas.

ACCESSIT PARS ALTERA

DE ANALYSI,

ET

MISCELLANEA.

LEODII EBURONUM,

Apud GUILIELMUM HENRICUM STREEL, Sereniſſimæ Suæ Celſitudinis Typographum.

CIƆ IƆC LXVIII.

ſub auſpiciis CELSITVDINIS TVÆ in lucem exirent. Is enim eſt Sereniſſimi Nominis Tui ſplendor, ea apud omnes reverentia, ut quidquid illud præfert, ſecuritatem adeptum cenſeri debeat, & claritatem. Verùm ſæpè mecum agitavi, an id mihi liceret. Non enim ignorabam quàm levia eſſent, quæ ſcripſeram: & peccare verebar in Principem, Natalibus, Dignitate, Sapientiâ eminentiſsimum, ſi ſcriptioni tam tenui, titulos adeò illuſtres præfigerem. Confirmavit me tamen cōſideratio benignitatis Tuę, quæ faciles aditus præbet, & ſublimes illas dotes, ad mediocritatem illorum, qui CELSITVDINI TVÆ

admo-

admoveri cupiunt, rarâ ac felici mixturâ, attemperat. Et ſanè, jure quodam ſuo, cogitationes hæ Geometricæ redire velle videbantur, undè venerant: In illis enim eram, cùm primùm coram CELSITUDINEM TUAM venerari, admirari Sapientiam, Benignitatem experiri mihi contigit. Patere igitur SERENISSIME PRINCEPS, ut ad hanc quoque pertinere mihi perſuadeam literarios conatus meos, & favorem, tot & tam frequentibus argumentis mihi perſpectum, iis etiam impende: Sperare enim ut quidquam illorum judicio tuo confirmes, nimis audax votum eſſet. Aliud mihi potiùs nun-

ſim, qui rectâ & circulo illud conſtruere inani labore contendunt: Sed quod viderem, illos etiam qui vel organicæ rationis, vel ſectionum Conicarum neceſsitatem agnovere, tam paucas nobis ejuſdem effectiones hactenus oſtendiſſe. Vix enim tot eſſe videntur, quot ſæcula, ab eo quo proponi cœptum eſt, numeramus. Paucæ omninò per circulum & Hyperbolam, vel parabolam; per circulum verò & Ellipſim, nulla, quod equidem ſciam, hactenus edita eſt. Quæ cum animo verſarem, & otium nactus, ante aliquot annos in hanc curam incumberem, inveni non unam, ſed infinitas: neque id vice ſimplici, ſed pluribus: & methodum ſecutus, quâ cœperam, omnia Problemata ſolida, infinitis modis, per circulum & Ellipſim, vel Hyperbolam, pari felicitate conſtruxi. Ejus ſpecimen hic habes, AMICE LECTOR, brevi libello concluſum; ut ſi fortè reipsâ minùs placeat, mole ſaltem diſplicere non poſſit. Methodum non adſcripſi, tum quod gratius ac utilius futurum arbitratus ſum, ſi eam ipſe privato ſtudio, ex his ſpeciminibus eliceres: tum etiam, quod judicium tuum de totâ re præſtolarer. Decrevi enim, ſi favor tuus accedat, non ipſam methodum tantùm, ſed & alia quæ ſimul obſervavi, brevi, Deo benè juvante, cenſuræ tuæ ſubmittere. Vale.

MESOLABUM

MESOLABUM

SEU

DUÆ MEDIÆ PROPORTIONALES

INTER DATAS

PER CIRCULUM ET ELLIPSIM

VEL HYPERBOLAM

INFINITIS MODIS EXHIBITÆ.

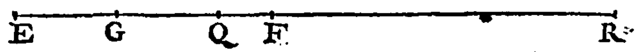
LEMMA PRIMUM.



Si à rectâ M L, auferantur æquales N M, O L, & inter N, & O, ſumatur quodlibet punctum H, Dico rectangulum M H L, minus rectangulo M N L, æquale eſſe rectangulo N H O.

RECTANGULUM enim M H L, æquatur duobus rectangulis, M N in H L, & N H in H L, ſed rectangulum N H in H L, eſt etiam æquale duobus rectangulis N H in H O, & N H in O L; igitur rectangulum M H L, æquatur tribus rectangulis M N in H L, N H in H O, & N H in O L (ſive N M, ex hypotheſi) hoc eſt duobus rectangulis NHO, LNM. Igitur, ablato utrimque rectangulo MNL, rectangulum M H L, minus rectangulo M N L, æquale erit rectangulo N H O. Quod erat demonſtrandum.

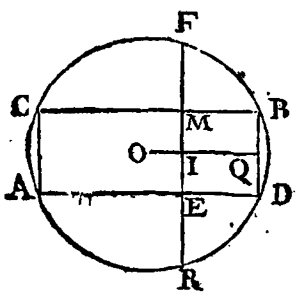
LEMMA SECUNDUM.



In rectâ E R, ſi fuerit ut R E ad F E, ita Q E, ad G E, erit ut E G, ad E Q, ita rectangulum E F G, ad rectangulum E F in Q R.

CUm enim ſit ut R E, ad F E, ita Q E, ad G E, erit permutando, ut R E, ad Q E, ita F E, ad G E, & dividendo, ut R Q, ad Q E, ita F G, ad G E, & convertendo, ac permutando, ut E G, ad E Q, ita F G, ad R Q; hoc eſt ſumtâ communi altitudine EF, ita rectangulum E F G, ad rectangulum ex E F in Q R. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA TERTIUM.



Si in circulo O A F B, inſcriptum, fuerit rectangulum ACBD, ſitque ex F puncto in circumferentiâ ducta FE, normalis ad latus A D, ita ut rectangulum D A E, ſit æquale quadrato E F; erunt quatuor rectæ, A C, A E, E F, AD, in continuâ analogiâ.

PRoducatur F E, ad circumferentiam in R, & cadat in BD, ex cẽtro normalis O Q, ſecans F E in I: Itaque B Q, Q D, erunt æquales, hoc eſt M I, I E, (ob parallelas) ſed ſunt etiam æquales R I, I F, Igitur & reliquæ R E, M F, æquales erunt, & rectangulum E F M, æquabitur rectangulo R E F, hoc eſt rectangulo D E A (ob circulum).

Quoniam autem, ex hypotheſi, rectangulum D A E, ſive D E A, cum quadrato A E, æquatur quadrato E F, hoc eſt duobus rectangulis EFM, FEM; ablatis æqualibus DEA, EFM, remanebit quadra-

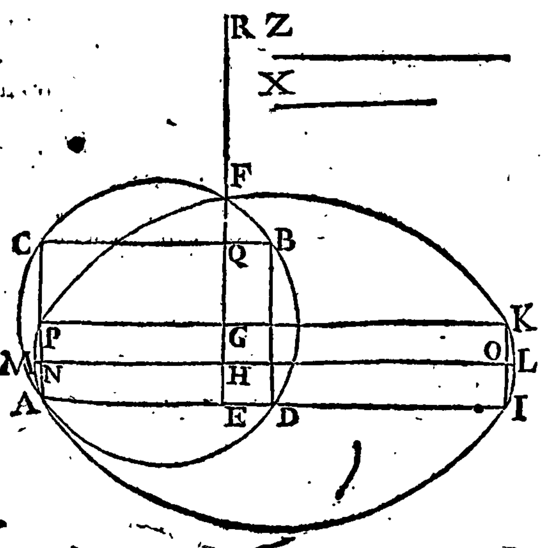
tum

tum AE, æquale rectangulo FEM, eritque ut EM ſive AC, ad EA, ita EA ad EF, ſed cùm ex hypotheſi rectangulum DAE, ſit æquale quadrato, EF, eſt ut EA, ad EF, ita EF, ad AD. Igitur ut AC, ad EA, ita EA, ad EF, & EF, ad AD. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO PRIMA.

Inter extremas datas, duas rectas medio loco proportionales, per circulum & Ellipſim, infinitis modis, exhibere.

Sint extremæ datæ Z major, X minor. Sumatur AD æqualis Z, eique ad rectos erigatur AC, æqualis X, & perficiatur rectangulum ACBD, circaque illud circulus ADF; Tum ſumto in AC (vel eâdem verſus C, quantumlibet productâ) quolibet puncto P, ducatur PK, parallela AD, ad quam ſit eadem AD, ut AP ad AC, cōpletoque rectangulo APKI, dividantur rectæ PA, KI, bifariam in N, & O, & juncta ON extendatur in L, ita ut rectangulum NLO, ad quadratum OK, eandem habeat rationem quam CA, ad AP; ſumtâque NM in directum æquali OL, axe ML, deſcribatur ſemi-ellipſis MFL, cujus applicatarum quadrata, eam habeat rationem ad rectangula ſub partibus axis, quam habet AP, ad AC, tranſibit illa per P, & K, ex conſtructione, ſecabitque circulum, ut patet; ſit punctum



ctum ſectionis F, ex quo cadat in AD normalis FE, ſecans parallelas CB, PK, NO, in punctis Q, G, H.

Dico quatuor AD, EF, EA, AC, eſſe continuè proportionales.

Producatur EF, & fiat ut EG, ad EQ, ita EF, ad ER.

Nunc quadratum FH, ad quadratum PN, ſive GH, eſt ut rectangulum LHM, ad rectangulum LNM, ob ellipſim; & dividendo, quadratum FH, minus quadrato GH, (hoc eſt rectangulũ EFG,) eſt ad quadratum GH, ſive PN, ut rectangulum LHM, minus rectangulo LNM (hoc eſt ut rectangulũ OHN*) ad rectangulum LNM; & permutando rectangulum EFG, eſt ad rectangulum OHN, ut quadratum PN, ad rectangulum LNM, ſive AP ad AC, vel EG ad EQ, ex conſtructione; ſed ut EG, ad EQ, ita rectangulum EFG, ad rectangulum ex EF in QR* Igitur, ut rectangulum EFG, ad rectangulum OHN, ita idem rectangulum EFG, ad rectangulum ex EF in QR, & permutando; ſunt itaque æqualia rectangula EF, QR, & OHN, ſive IEA. Cùm vero rectangulum EFQ, ſit etiam æquale rectangulo DEA (ob circulum) erit ablatis utrimque æqualibus, rectangulum ex EF in QR minus rectangulo EFQ (hoc eſt rectangulum RFE) æquale rectangulo IEA, minus rectangulo DEA (hoc eſt rectangulo ſub ID & EA): Erit itaque ut RF, ad ID, ita AE ad EF.

** per lemma primũ.*

** per lemma ſecundum.*

Ulterius, ex conſtructione, eſt ut RE, ad FE, ita QE ad GE, ſive CA, ad AP, & ut CA, ad AP, ita KP, vel IA, ad DA, erit igitur, ut RE, ad FE, ita IA, ad DA, & dividendo, ac permutando, ut RF, ad ID, ita FE, ad DA: ut autem RF, ad ID, ita demonſtratum eſt eſſe AE, ad EF; itaque ut AE, ad FE, ita FE, ad DA. Igitur rectangulum DAE æquale eſt quadrato EF, & conſequenter * quatuor DA, FE, AE, EQ vel AC, ſunt in continuâ proportione. Quod erat demonſtrandum.

** per lemma tertiũ.*

Si punctum P ſupra C, in AC productâ foret acceptum, non abſimilis eſſet demonſtratio, quod monuiſſe ſufficiat, cùm nullo negotio ſeſe oblatura ſit conſideranti,

Ex quo evidens eſt, cum punctum P poſſit ubique in lineâ AC, etiam in infinitum productâ, ſumi Ellipſes infinitas ſpecie differentes ſatisfacere propoſito.

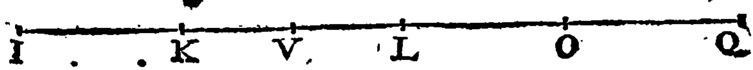
Conſtruximus itaque Problema per circulum & ellipſim infinitis modis. Quod erat faciendum.

COROL-

COROLLARIUM.

Patet etiam methodus idem problema ſolvendi per duas ellipſes, cùm enim quælibet earum quas ſuperiori deſcriptione complexi ſumus, ſecet circulum in puncto F, ſequitur duas quaſlibet in eodem puncto ſeſe interſecare.

LEMMA QUARTUM.



Si à rectâ IO, auferantur æquales IK, OL, & in eâdem productâ ſumatur quodlibet punctum Q, Dico rectangulum KQL, minus rectangulo KOL, æquari rectangulo IQO.

Biſecetur IO in V. Itaque rectangulum KQL, una cum quadrato VL, erit æquale quadrato VQ, ſed quadratum VQ ſimiliter eſt æquale rectangulo IQO, unà cum quadrato VO, & quadratum VO, eſt pariter æquale rectangulo KOL, unà cum quadrato VL: Igitur rectangulum KQL, unà cum quadrato VL, æquale erit rectangulis IQO, KOL, cum quadrato VL, & ablatis utrimque rectangulo KOL, & quadrato VL; rectangulum KQL, minus rectãgulo KOL, æquabitur rectangulo IQO. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA QUINTUM.

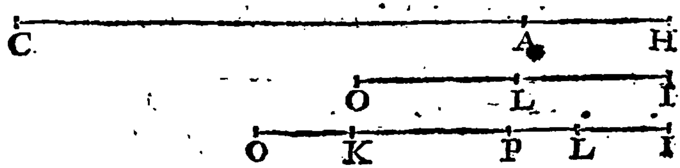


In rectâ GR, ſumptis tribus punctis E, M, F, ſi fuerit ut GE, ad EM, ita EF, ad FR, erit ut GE, ad EM, ita rectangulum GFE, ad duo rectangula EFR, FEM.

Cum enim ſit ut GE, ad EM, ita EF, ad FR; erit permutando & componendo ut GE cum EF, ſive GF, ad EF, ita ME

cum FR, ad FR, Et rurſus permutando, ut GF, ad ME cum FR, ita FE, ad FR; hoc eſt GE ad EM, ex hypotheſi. ſed ut GF, ad EM cum FR, ita (ſumtâ communi altitudine EF) rectangulum GFE, ad duo rectangula MEF, RFE. Igitur ut GE, ad EM, ita rectangulum GFE, ad duo rectangula MEF, RFE. Quod erat &c.

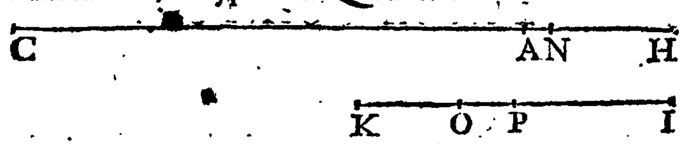
LEMMA SEXTUM.



Si fuerint duæ rectæ, CH ſecta utcumque in A, & altera OI, vel æqualis mediæ inter CA, & AH, vel major quam media; Dico primo OI ita poſſe ſecari in L, ut eadem ſit ratio rectanguli OLI, ad quadratum dimidiæ AH, quæ eſt CA, ad AH,

Sit enim æqualis mediæ, & ſecetur bifariam in L. Cum ſit ut CA, ad OI, ita OI, ad AH, erit ut CA, ad AH, ita quadratum OI, ad quadratum AH, & ſumtis ſubquadruplis, ita rectangulum OLI ad quadratum dimidiæ AH. Quod erat &c.

Sit deindè major, & ex illâ reſecetur IK æqualis mediæ inter CA & AH, quæ bifariam ſecetur in P. patet ita eſſe quadratum PI ad quadratum dimidiæ AH, ut CA, ad AH. Itaque faciendum eſt rectangulum OLI, æquale quadrato PI, quod quidem fieri poterit, cùm IP ſit minor dimidiâ OI, ex hypotheſi. Quod &c.



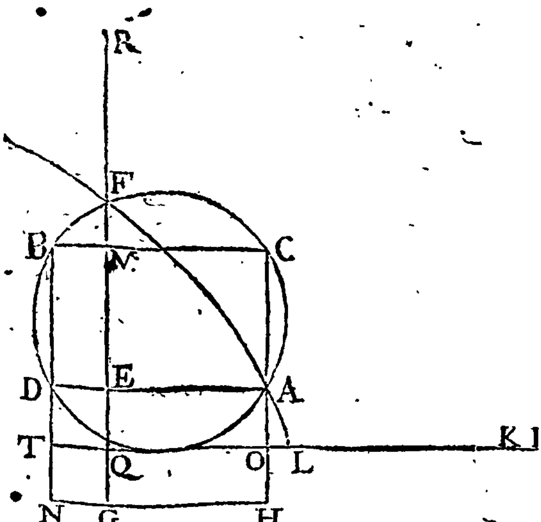
Si verò OI fuerit minor mediâ. Dico ſecundò AH ita ſecari poſſe in N, ut rectangulum ANH, ad quadratum dimidiæ OI, habeat eandem rationem, quam HA, ad AC.

Sumtâ enim, ut prius, IK, mediâ majori OI, & diviſâ bifariam in P, fiat ut quadratum PK ad quadratum dimidiæ OI, ita quadratũ dimi-

dimidiæ AH ad rectangulum ANH, quod quidem fieri poterit cum KI ponatur major OI, ideoque rectangulum ANH futurum ſit minus quadrato dimidiæ AH. Igitur erit permutando ut quadratum PK, ad quadratum dimidiæ AH, ita quadratum dimidiæ OI, ad rectangulum ANH, ſed ut quadratum PK, ad quadratum dimidiæ AH, ita quadratum IK, ad quadratum AH, ſive CA, ad AH. Igitur ut CA, ad AH, ita quadratum dimidiæ OI, ad rectangulum ANH, ſive convertendo ut AH, ad CA, ita rectangulum ANH, ad quadratum dimidiæ OI. Quod erat &c.

PROPOSITIO SECUNDA.

Propoſitum ſit eaſdem rectas, per circulum & Hyperbolam, infinitis modis exhibere.



SIt, ut prius, circa rectangulum ex datis rectis AD, AC, circulus AFD; productâque CA utcũque in H, perficiatur rectangulũ HADN, & diviſis AH; DN, bifariam in O, & T, jungatur TO, & producatur in I, ita ut ſit eadem ratio TO ad OI, quæ HA, ad AC. Erit igitur OI, vel major mediâ inter CA, AH vel æqualis mediæ vel minor. Sit primo major, & ſecetur IO in L, ita ut rectangulum ILO, ad quadratum AD, eandem habeat rationem, quæ eſt CA, ad AH (id enim fieri poterit *) ſumtaque IK, æquali LO, axe KT, latere tranſverſo KL, recto verò, quod ſit ad KL, ſicut HA ** per lemma ad ſextum*

ad AC, deſcribatur ex L vertice, ſemi-hyperbola LAF, tranſibit illa per A, ex conſtructione & ſecabit circulum, ſecet in puncto F. ex quo cadat in HN normalis FQ ſecans parallelas CB, AD, OT, in punctis M, E, Q.

Dico quatuor DA, FE, EA, AC, eſſe continuè proportionales.

Fiat ut GE, ad EM, ita EF, ad FR.

Itaque ob hyperbolam, ut quadratum FQ, ad quadratum AO, ita rectangulum KQL, ad rectangulum KOL, & dividendo, ut quadratum FQ, minus quadrato AO, ſive QE (hoc eſt ut rectangulum GFE) ad quadratum AO, ita rectangulum KQL, minus rectangulo KOL (hoc eſt, ita rectangulum IQO *) ad rectangulum KOL: & permutando, ut rectangulum GFE, ad rectangulum IQO, ita quadratum AO, ad rectangulum KOL, ſive latus rectum, ad tranſverſum, vel, ex conſtructione, HA ad AC. ſed ut HA, ad AC, ſive GE, ad EM, ita rectangulum GFE ad duo rectangula MEF, RFE*, Igitur ut rectangulum GFE ad rectangulum IQO ita rectangulum GFE ad duo rectangula MEF, RFE, & permutando. Sunt itaque æqualia, rectangulum IQO, & duo rectangula MEF, RFE, ſed ſunt etiam æqualia, ob circulum rectangula EFM & DEA ſive TQO: Igitur additis æqualibus, tria rectangula MEF, RFE, EFM, æqualia erunt duobus IQO, TQO. ſed tria rectangula MEF, RFE, EFM, æqualia ſunt unico REF, duo verò IQO, TQO æqualia ſunt rectangulo ſub IT & OQ; Igitur rectangulum REF, æquale erit rectangulo ſub IT & OQ, eritque ut IT, ad RE, ita EF, ad OQ.

*per lemma quartum.

*per lemma quintum.

Nunc, ex conſtructione, eſt ut OT, ad OI, ita HA, ad AC, ſive GE ad EM, vel EF ad FR. Igitur componendo & per converſionem rationis erit ut IT, ad TO, ita RE, ad EF, & permutando ut IT, ad RE, ita TO, ad EF. ſed ante demonſtratum eſt eſſe ut IT, ad RE, ita EF, ad OQ; erit itaque ut TO, ad EF, ita EF, ad OQ, & quadratum FE, æquabitur rectangulo TOQ, ſive DAE, Igitur quatuor DA, EF, AE, AC, erunt in continuâ analogiâ* Quod erat demonſtrandum.

*per lemma tertiũ.

Si OI eſſet æqualis mediæ inter CA & AH, tunc biſecanda foret OI, & ex puncto biſectionis, ducenda per A recta quæ utique circulo occurreret in puncto F, quæſito, ut facilè oſtenditur. ſed nec tanto molimine opus eſſet, ſi in punctum H felici caſu incidiſſes, tunc enim ipſæ CA, OI, AH, OT, vel DA, eſſent continuè proportionales, ut patet.

Sit

Sit nunc OI minor quàm media. Secetur bifariam in P, & AH, in N, ita ut ſit eadem ratio rectanguli HNA, ad quadratum PO, quæ HA, ad AC (hoc enim rurſus fieri poterit.*) Tum in puncto P, erigantur utrimque PL, PK, æquales ON, & perficiatur rectangulum AHVT, itemque AOIY. Deindè axe LT, vertice L, latere tranſverſo KL, deſcribatur ſemihyperbole LAF, cujus latus tranſverſum ad rectum, eam habeat rationem quam HA, ad AC, tranſibit illa per A, cùm rectangulum HNA, ſive KTL, ad quadratum OP, ſive AT, eandem habeat rationem quam HA ad AC (ex conſtructione;) ſecabit etiam circulum in puncto F, ex quo demiſſa normalis FE, in AD, occurrat CB, in M, & productis PO, VH, in Q, & G.

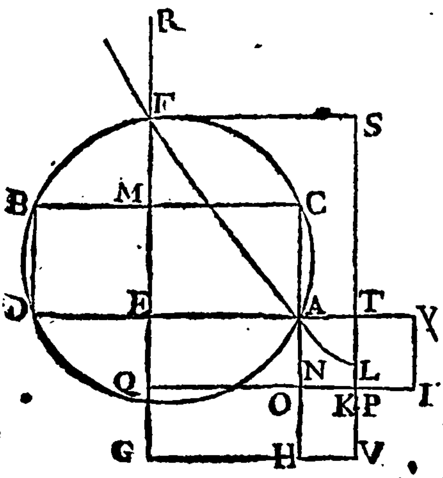
*per lemma ſextum

Dico quatuor DA, EF, EA, AC, rurſus eſſe continuè proportionales.

Productâ EF, fiat ut GE, ad EM, ita EF, ad FR, & applicetur FS, ad axem hyperbolæ.

Nunc quadratum FS, ſive ET, ad quadratum TA, eandem habebit rationem, quam rectangulum KSL, ad rectangulum KTL, & dividendo quadratum TE, minus quadrato TA (hoc eſt rectangulum YEA) ad quadratum TA, erit ut rectangulum KSL minus rectangulo KTL (hoc eſt ut rectangulum VST*) ad rectangulum KTL, & permutando, ut rectangulum YEA, ad rectangulum VST, ita quadratum TA, ad rectangulum KTL, hoc eſt ita latus rectum, ad tranſverſum, ſive CA, ad AH, ex conſtructione. Igitur convertendo, ut rectangulum VST, ſive GFE, ad rectangulum YEA, ita AH, ad AC, ſive GE ad EM. Sed ut GE, ad EM, ita idem rectangulum GFE, ad duo rectangula MEF, RFE: Itaque rectangulum YEA, æquale

*per lemma quartum.



eſt duobus MEF, RFE. Sunt autem etiam æqualia rectangula DEA, EFM (ob circulum) Igitur, additis utrimque æqualibus, rectangulum YEA, unà cum rectangulo DEA, æquale erit tribus rectangulis MEF, RFE, FEM. Sed duo rectangula YEA, DEA, æqualia ſunt unico ſub YD, & EA, tria verò MEF, RFE, EFM, unico REF; Igitur rectangulum ſub YD & EA, æquale erit rectangulo REF; eritque ut YD, ad RE, ita EF, ad EA.

Rurſus, ex conſtructione, eſt ut DA ad AY, ita HA ad AC, ſive GE ad EM hoc eſt EF ad FR, erit igitur componendo, & per converſionem rationis, ut DY ad DA, ita ER, ad EF, & permutando ut DY, ad ER, ita DA, ad EF. Sed ut DY, ad ER, ita oſtenſum eſt eſſe EF, ad EA; erit itaque ut DA, ad EF, ita EF, ad EA, & rectangulum DAE æquabitur quadrato EF. Sunt igitur quatuor DA, EF, EA, AC, continuè proportionales.* Quod erat demonſtrandum.

*per lemma tertiū.

Unde ſequitur, cùm punctum H poſſit ubilibet in rectâ CA, indefinitè productâ ſumi; infinitas Hyperbolas ſpecie differentes, ſatisfacere propoſito. Conſtruximus itaque Problema per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

HInc evidens eſt methodus idem Problema ſolvendi per duas Hyperbolas, vel per Ellipſim & Hyperbolam infinitis modis. Cùm enim Ellipſes & Hyperbolæ ex præſcripto conſtructionum precedentium deſcriptæ, omnes ſecent circulum in F, patet duas quaſlibet in eodem puncto ſeſe interſecare.

MONITUM.

ET hactenus quidem conſtructiones per infinitas Ellipſes, vel Hyperbolas, ut propoſitum erat, abſolvimus. Addemus nunc particulares aliquot ejuſdem Problematis effectiones, quas magis univerſales reddere poterit, qui tanti eſſe putaverit, methodum quâ ſupra uſi ſumus, in his etiam experiri. Sit itaque,

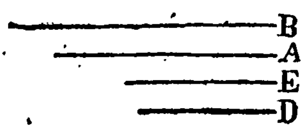
LEMMA SEPTIMUM.

Si fuerint quatuor rectæ, ſitque ratio primæ majoris ad ſecundam, eadẽ quæ differentiæ ſecundæ & tertiæ, ad differentiam tertiæ & quartæ. Sit item ut ſecunda ad tertiam, ita differentia primæ & tertiæ, ad differentiam ſecundæ & quartæ; erunt illæ continuè proportionales.

HAbeant quatuor rectæ B, A, E, D, conditiones lemmatis. Dico illas eſſe continuè proportionales.

Cùm enim ſit, ex hypotheſi, ut B, ad A; ita A minus E, ad E minus D, erit permutando & componendo, ut B cum A minus E, ad A minus E, ita A cum E minus D, ad E minus D, & rurſus permutando, ut B cum A minus E, ad E cum A minus D, ita A minus E, ad E minus D, hoc eſt B, ad A, ex hypotheſi. Ulterius cum ex eadem, ſit ut A, ad E, ita B minus E, ad A minus D, erit permutando, & componendo, ut A cum B minus E, ad B minus E, ita E cum A minus D, ad A minus D, & rurſus permutando, ut A cum B minus E, ad E cum A minus D, ita B minus E, ad A minus D, ſed ut A cum B minus E, ad E cum A minus D, ita oſtenſum eſt eſſe B, ad A. Igitur ut B, ad A, ita B minus E, ad A minus D, hoc eſt A, ad E ex hypotheſi. Sunt igitur tres proportionales B, A, E.

Nùnc cum ſit ut B, ad A, ita A minus E, ad E minus D, erit ut A, ad E, ita A minus E, ad E minus D, & permutando & dividendo, ut E, ad A minus E, ita D, ad E minus D, & rurſus permutando, ut E ad D, ita A minus E, ad E minus D, hoc eſt A, ad E, ex oſtenſis. Tres igitur A, E, D, ſunt etiam in continuâ proportione, & conſequenter quatuor, B, A, E, D, ſunt continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

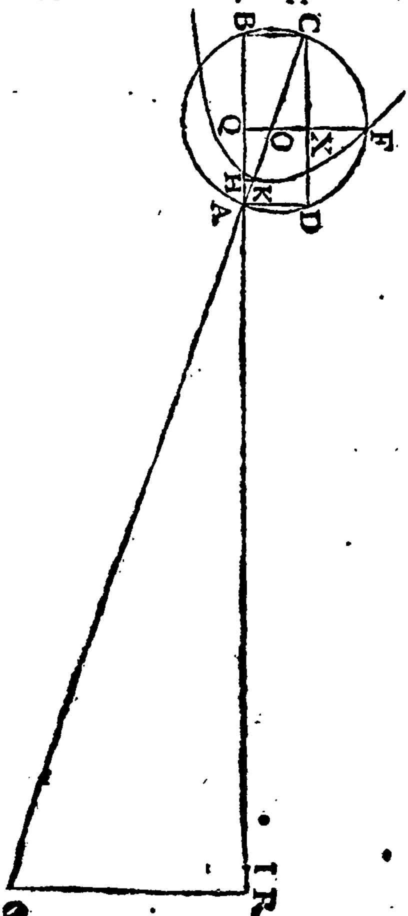


PROPOSITIO TERTIA.

Inter extremas datas duas medio loco proportionales invenire.

SInt datæ rectæ AB major, AD minor, & ex illis, ut prius, rectangulum ABCD, circa quod deſcriptus intelligatur circulus. Tum pro-

producta BA in I, donec AI ſit quadrupla AB, ſecetur AB in H, ut rectangulum IHA, ſit æquale quadruplo rectanguli ABCD: & ſump-tâ IR æquali AH, erectâque HK dimidiâ AH, jungatur KA, & producatur donec occurrat normali RG in G. Tum latere tranverſo GX, vertice K, latere verò recto tranſverſi ſub quintuplo deſcribatur Semi-hyperbole FK, cujus applicatæ ad diametrum KG, ſint parallelæ KH. Illa utique ſecabit circulum. Secet in puncto F, ex quo applicetur FO, ac producatur donec occurrat AB in Q; occurret etiam DC in X.



Dico quatuor BA, QF, QA, AD, eſſe continuè proportionales.

Rectangulum enim GOK, ad rectangulum RQH, rationem habet compoſitam ex ratione GO, ad RQ (ſive ob ſimilitudinem triangulorum ARG, OAQ, KAH) ex ratione KA, ad AH, & ex ratione OK, ad HQ, hoc eſt ejuſdem KA ad eandem AH, hæ verò duæ rationes, componunt rationem quadrati KA, ad quadratum AH. Igitur ut quadratum AK ad quadratum AH, ita rectangulum GOK ad rectangulum RQH. Sed cum AH, ſit dupla HK, erit quadratum AH, quadruplum quadrati HK, & conſequẽter quadratum AK, quod æquale eſt utrique AH, HK, erit ſeſquiquartum quadrati AH; Igitur rectangulum GOK erit etiam ſeſquiquartum rectanguli RQH ſive ut 5 ad 4.

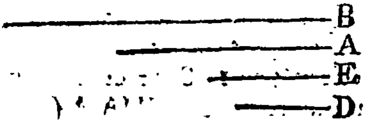
Idem autem rectangulum GOK, ad quadratum OF, eſt ut latus tranſverſum ad rectum, ſive ut 5 ad 1, ex conſtructione; Igitur rectangulum RQH, ad quadratum OF erit ut 4 ad 1. Sed rectangulum RQH, eſt æquale rectangulo IQA, minus rectangulo IHA. * (Itaque rectangulum IQA ſive IAQ cum quadrato AQ) minus rectangulo IHA, erit quadruplum quadrati OF. Sed rectangulum IAQ, quadruplum eſt rectanguli BAQ ex conſtructione, cum AI poſita ſit quadrupla BA; & quadratum AQ, quadruplum eſt quadrati QO, cum AQ ſit ejuſdem dupla, ſive ut AH ad HK, ſimiliter rectangulum IHA quadruplum eſt rectanguli ABCD, ex conſtructione. Igitur additis & demtis partibus in eadem ratione, rectangulum IQA, cum quadrato AQ, minus rectangulo IHA, quadrupla erunt rectanguli BAQ, cum quadrato QO, minus rectangulo ABCD. Cùm autem oſtenſum ſit rectangulum IQA cum quadrato AQ minus rectangulo IHA, quadruplum etiam eſſe quadrati OF, ſequitur rectangulum BAQ, cum quadrato QO, minus rectangulo ABCD, æquale eſſe eidem quadrato OF. Sed quadratum OF, æquale eſt duobus quadratis FQ, OQ, minus rectangulo ſub FQ & dupla OQ, hoc eſt minus rectangulo FQA; Igitur ablato utrimque quadrato OQ, rectangulum BAQ, minus rectangulo ABCD, æquale erit quadrato FQ, minus rectangulo FQA. Eſt autem rectangulum BAQ minus rectangulo ABCD, æquale rectangulo ſub AB, & AQ minus CD; quadratum verò FQ minus rectangulo FQA, æquatur rectangulo ex FQ, in FQ minus AQ, erit igitur ut BA, ad QF, ita FQ minus AQ ad AQ minus AD. Sed cum rectangulum BQA, ſit æquale rectangulo QFX (ob circulum) eſt etiam ut QF, ad QA, ita BQ ſive BA minus AQ ad FX, (ſive FQ minus OX, vel AB.) Igitur quatuor rectæ BA, QF, QA, AD, habent conditiones lemmatis ſeptimi, ſuntque continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

* *per lemma quartum.*

LEMMA OCTAVUM.

Si fuerint quatuor rectæ B, A, E, D, fueritq; ut B, ad A, ita E, ad D, & ut A, ad E, ita B minus E, ad A minus D, erunt illæ in continua analogia.

CUm enim ſit ut B, ad A, ita E, ad D, erit permutando & dividendo ut B minus E, ad E, ita A minus D, ad D, & rurſus permutando,



mutando, ut B minus E, ad A minus D, ita E, ad D. Sed ut E minus A, ad A minus D, ita etiam eſt ex hypotheſi A, ad E. Igitur ut A, ad E, ita E, ad D, eſt autem pariter ex hypotheſi ut E, ad D, ita B ad A; itaque ut B ad A, ita A, ad E, & E, ad D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO QUARTA.

Cubum cubi duplum invenire, ſive inter extremas datas in ratione duplâ duas medio loco proportionales exhibere.

Sint datæ rectæ AB, ejuſdemque dupla BC, & facto ex iis rectangulo ABCD, deſcriptoque circa illud circulo, dividantur AB, BC, biſariam in M & P, & jungatur PM occurrens DA productæ in I, & IP producatur in directum, donec eidem ſit æqualis PH. Tum ad IH, productâ DC in N; fiat Ellipſis cujus diameter ſit IH, una applicatarum DN, quæ utique ſecabit circulum, ſecet in E, ex quo cadat normalis EF. Dico quatuor DA, EF, FB, BA, eſſe in continuâ proportione.

Cadat ex H normalis HK in AD productam, & ducatur MO, parallela BC occurrens EF in O, & ad OM ducatur PQ, parallela AB, tum producatur EF, donec occurrat IH, in G, erit GF applicata ad diametrum IH, ex conſtructione.

Patet nunc, cum anguli ad A & B, ſint recti, & anguli, IMA, BMP, æquales, triangula IAM, BPM, eſſe æquiangula, Cùm verò BM, ſit æqualis MA, rectas BP, IA, fore etiam æquales. Patet etiam ob eandem rationem, triangulum PCN, eſſe æquiangulum triangulo PBM, & cum PB, PC, ſint æquales ex conſtructione, CN, æquari BM, & PM ipſi PN, cum verò æquales ſint etiam IP, PH, demtis æqualibus PM, PN, remanere æquales IM, NH. Cùm autem ſit ut IM ad NH, ita IA, ad DK (ob parallelas AM, DN, KH) ſequitur rectas AI, DK, etiam eſſe æquales, & cum AI, ſit dupla AM, erit etiam ID, dupla DN, IL dupla LG, & MO dupla OG.

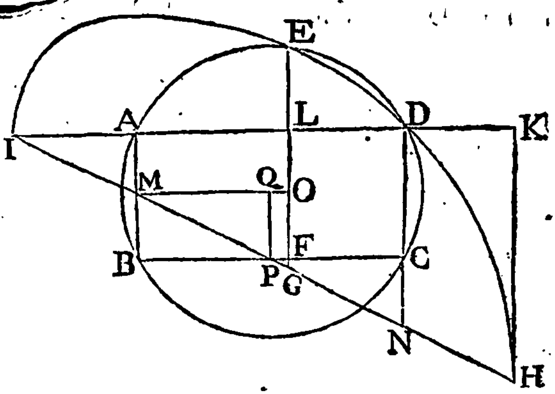
Nunc, ut quadratum DN ad quadratum EG, ita rectangulum INH, ad rectangulum IGH (ob ellipſim) Ratio verò ad rectan-

guli

guli INH, ad rectangulum IGH, componitur ex ratione NI, ad IG (ſive DI, ad IL) & ex ratione HN ad HG (ſive KD, ad KL) hæ verò duæ rationes, componunt rationem rectanguli KDI, ad rectangulum KLI; Igitur ut quadratum DN, ad quadratum EG, ita rectangulum KDI, ad rectangulum KLI, & permutando ut quadratum ND, ad rectangulum KDI, ita quadratum EG, ad rectangulum KLI.

Rurſus ratio quadrati DN, ad rectangulum KDI, componitur ex ratione DN, ad DI, ſive 1 ad 2, & ex ratione ejuſdem DN ad DK ſive DC, hoc eſt 3 ad 2, ex his verò rationibus componitur ratio 3 ad 4; Igitur ut 3, ad 4, ita quadratum DN, ad rectangulum IDK, hoc eſt ita quadratum EG, ad rectangulum ILK. Tria igitur rectangula ILK, æquantur quatuor quadratis EG.

Ulterius cum rectangulum ILK, ſit æquale duobus rectangulis DLA, KDI * tria rectangula ILK, æqualia erunt tribus rectangulis *per lemma quartum.*



DLA, unà cum tribus KDI. Sed cum DI ſit tripla KD, rectangulum KDI, erit æquale triplo quadrato KD, (ſive AB) & triplum rectangulum KDI, 9 quadratis AB, hoc eſt, cum CB ſit dupla BA, quatuor rectangulis DABC, cum quadrato AB: Igitur tria rectangula ILK, æqualia erunt tribus rectangulis DLA, unà cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato BA. At cum tria rectangula ILK, oſtenſa ſint æqualia quatuor quadratis EG, ſequitur tria rectangula

DL

DLA, unà cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato BA, æqualia eſſe eidem quadrato EG quater ſumto. Sed quadratum EG, æquatur quadratis GO, & OE, cum rectangulo GOE bis, hoc eſt cum unico MOE; Igitur quadruplum quadratum EG, æquabitur quatuor quadratis GO (ſive unico quadrato MO) cum quatuor quadratis OE, & quatuor rectangulis MOE. Quatuor verò rectangula MOE, æqualia ſunt quatuor rectangulis MO, ſive BF, in FE, minus quatuor rectangulis MOF, hoc eſt (cùm MO ſit æqualis AL, & AD quadrupla OF, ex conſtructione) minus rectangulo DAL. Igitur quatuor quadrata EG, æqualia erunt quatuor quadratis EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, minus rectangulo DAL. Sed quatuor quadrata EG, oſtenſa ſunt æqualia tribus rectangulis DLA, cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato AB, quatuor itaque quadrata EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, minus rectangulo DAL, æqualia erunt tribus rectangulis DLA, cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato AB. Et addito utrimque rectangulo DAL, (ſive DLA, cum quadrato LA,) quatuor quadrata EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, æquabuntur quatuor rectangulis DLA, cum quadrato LA, ſive MO, & quatuor rectangulis DABC, cum quadrato AB, & ablato utrimque quadrato MO, ac ſumtis ſub quadruplis, quadratum EO cum rectangulo BFE, æquale erit rectangulis DLA, DABC, cum quartâ parte quadrati AB (hoc eſt cum quadrato OF). Sed rectangulum DLA, æquale eſt rectangulo FEL, ob circulum, rectangulum verò FEL, cum quadrato OF, æquale eſt quadrato EO. Igitur quadratum EO, cum rectangulo BFE, æquale erit rectangulo DABC, cum quadrato EO; & ablato utrimque quadrato EO, remanebit rectangulum BFE, æquale rectangulo ABCD; eritque ut CB, ad EF, ita FB, ad BA, ſive FL.

Sed cum rectangulum CFB, ſit æquale rectangulo FEL, (ob circulum) eſt etiam ut EF ad FB, ita CF (ſive CB minus BF) ad EL (ſive AF minus FL;) Quatuor igitur rectæ CB, EF, FB, FL habent conditiones lemmatis octavi. Sunt igitur in continuâ proportione, & conſequenter etiam ipſis æquales DA, EF, FB, BA. Quod erat demonſtrandum.

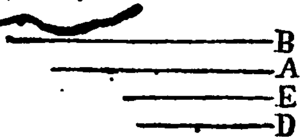
LEM.

LEMMA NONUM.

In quatuor rectis B, A, E, D, ſi fuerit ut prima cum ſecundâ, ad ſecundam cum tertiâ, ita tertia ad quartam, & rurſus ut prima minus tertiâ, ad ſecundam minus quartâ, ita ſecunda ad tertiam, erunt illæ in continuâ analogiâ.

CUm enim ſit ut B cum A, ad A cum E, ita E, ad D, ex hypotheſi, erit permutando, & dividendo, ut B cum A minus E, ad E, ita A cum E minus D, ad D, & rurſus permutando, ut B cum A minus E, ad A cum E minus D, ita E, ad D.

Ulterius, cum ſit etiam ex hypotheſi, ut B minus E, ad A minus D, ita A, ad E, erit permutando, & componendo, ut B minus E cum A, ad A, ita A minus D cum E, ad E, & rurſus permutando, ut B minus E cum A, ad A minus D cum E, ita A ad E. Sed ut B cum A minus E, ad A cum E minus D, ita oſtenſum eſt eſſe E, ad D; igitur ut A, ad E, ita E, ad D.



Nunc ex hypotheſi, eſt ut B cum A, ad A cum E, ita E, ad D, erit igitur ut B cum A, ad A cum E, ita A ad E: & permutando, ac dividendo, ut B ad A, ita A ad E, ſed ut A, ad E, ita eſt etiam E, ad D. Quatuor igitur B, A, E, D, ſunt in continuâ proportione. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO QUINTA.

Inter extremas datas duas medio loco proportionales invenire.

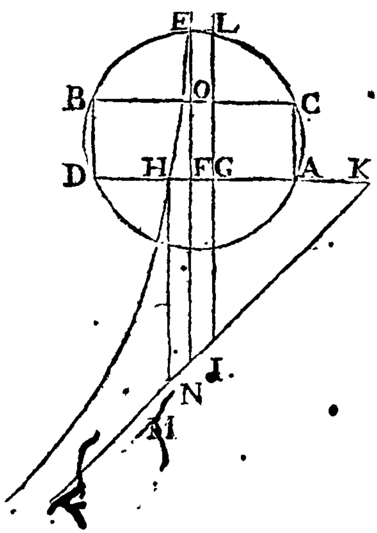
DAtæ ſint extremæ AB, major AC, minor, & ex illis, ut prius rectangulum ACBD, & circa illud circulus. Secetur AD, in G, ita ut AG, ſit æqualis AC, productâque DA, in K, donec AK, ſit æqualis AG, fiat GI, normalis ad AD, æqualis GK, quæ verſus G indefinitè producatur, tum junctâ KI, & productâ etiam indefinitè à

parte I, ut in M; ſumatur in AD, recta AH, media proportionalis, inter DA, & GA vel AC; & circa aſymptotos GI, IM, deſcribatur Hyperbola tranſiens per punctum H, quæ ſecabit circulum à parte G, ut patet, ſecet in puncto E; ex quo cadat in AD, normalis EF, ſecans CB, in O.

Dico quatuor DA, EF, FA, AC, eſſe continuè proportionales:

Producatur EF, ad KI, in N, & eidem parallela ducatur HM: Tum ex puncto E, in IG productam, cadat normalis EL, quæ utique erit parallela & æqualis FG: & cum KG, GI, ſint æquales, ex conſtructione, erunt etiam æquales KF, FN, & KH, HM.

Nunc, cum duo puncta H, & E, ſint in Hyperbolâ, ductæque ſint ad aſymptotos parallelæ HG, EL, itemque HM, EN, erit rectangulum MHG, æquale rectangulo NEL. Sed rectangulum MHG, eſt æquale rectangulo KHG, rectangulum vero NEL, eſt æquale rectangulo NFG (ſive KFG,) una cum rectangulo EFG. Igitur rectangulum KHG, eſt æquale rectangulis KFG, EFG. Et addito utrimque quadrato GA, rectangulum KHG, cum quadrato GA, erit æquale rectangulis KFG, EFG, cum quadrato GA. Sed rectangulum KHG cum quadrato GA, æquale eſt quadrato AH, & rectangulum KFG cum quadrato GA, ſimiliter eſt æquale quadrato AF; Itaque quadratum AH, erit æquale quadrato AF, cum rectangulo EFG, & cum AH, ex conſtructione, ſit media inter DA; AC, ideoque ejus quadratum æquale ſit rectangulo ACBD; ſequitur rectangulum ACBD, æquale eſſe quadrato AF, & rectangulo EFG: &, addito utrimque rectangulo AGL, rectangulum ACBD cum rectangulo AGL, fore æquale quadrato AF, cum rectangulis AGL, EFG, hoc eſt cum unico rectangulo AFE. Sed cum AG, ſit æqualis AC, ex



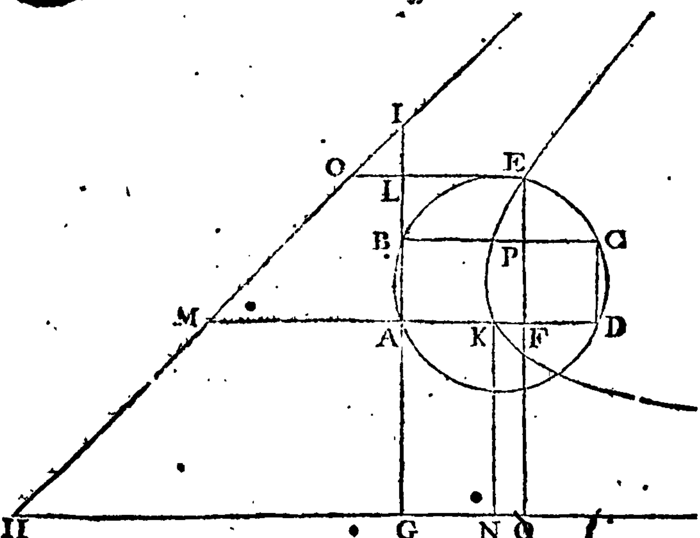
conſtru-

conſtructione, rectangulum ACBD, unà cum rectangulo AGL, æquale erit rectangulo ex AC in AD, cum GL ſive FE, & ſimiliter quadratum AF cum rectangulo AFE, æquale erit rectangulo ex AF, in AF unà cum EF. Igitur rectangulum ex AC, in AD cum FE, æquale erit rectangulo ex AF, in AF cum FE, & conſequenter erit eadem ratio DA cum FE, ad FE cum AF, quæ eſt AF, ad AC.

Sed cum rectangulum DFA, ſit æquale rectangulo FEO, (ob circulum) eſt etiam ut DF (ſive DA minus AF) ad EO (ſive FE minus FO vel AC) ita EF, ad FA. Invenimus igitur in quatuor rectis DA, EF, FA, AC, conditiones lemmatis 9. Sunt itaque continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SEXTA.

Idem alio modo efficere.



Sint duæ datæ AD major, AB minor, & rurſus ex illis rectangulum, circa quod deſcribatur circulus ABCD; Tum productâ BA,

 utrim-

utrimque in G, & I, donec IA, AG, ſint æquales AD, ducatur GH, parallela AD, & ejuſdem dupla, & jungatur HI, ſumtâque AK, æquali AB, circa aſymptotos HG, HI, deſcribatur Hyperbola tranſiens per punctum K, quæ à parte I, ſecet circulum in E.

Dico, demiſsâ normali EF, ſecante CB in P, quatuor AD, EF, FA, AB, eſſe continuè proportionales.

Cadat ex K, in HG productam normalis KN, & ex E, in IG, normalis EL, quæ producta ſecet HL, in O, & producatur EF, donec occurrat HG, ſimiliter productæ, in Q, & DA, donec HI, occurrat in M. Patet AM, fore ſubduplam GH, hoc eſt æqualem DA, vel GA, vel AI.

Et quoniam EO, KM, itemque EQ, KN, ſunt parallelæ, & ex punctis K & E, in hyperbolâ ſumtis cadunt in aſymptotos, erunt rectangula NKM, QEO, æqualia. Sed rectangulum NKM, æquatur rectangulo NKA (ſive DAK) & rectangulo ſub NK, ſive DA, in AM (hoc eſt quadrato GA, vel AI) rectangulum verò QEO, æquale eſt rectangulo QEL, & rectangulo ex QE, ſive GL, in LO (vel LI, ob æquales HG, GI) Igitur rectangulum DAK, cum quadrato IA, æquatur rectangulo QEL, cum rectangulo GLI, & addito utrimque quadrato LA, quadratum IA, cum rectangulo DAK, & quadrato LA, æquabitur rectangulo QEL, cum rectangulo ILG, & quadrato LA, (hoc eſt cum quadrato IA). Et dempto utrimque quadrato IA, rectangulum DAK, cum quadrato LA, æquabitur rectangulo QEL. Et ablato utrimque rectangulo DAK, quadratum LA, erit æquale rectangulo QEL, minus rectangulo DAK. Sed rectangulum QEL, æquale eſt duobus rectangulis QFA, FEL; Igitur ablato utrimque rectangulo FEL, quadratum LA (ſive FE) minus rectangulo FEL, æquabitur rectangulo QFA, (ſive DAF,) minus rectangulo DAK. Sed quadratum FE, minus rectangulo FEL, æquatur rectangulo ſub EF, & differentiâ EF, EL, rectangulum verò DAF, minus rectangulo DAK, æquatur rectangulo ſub AD, & differentiâ ipſarum FA, AK, (ſive FA, AB). Erit igitur ut DA, ad FE, ita EF minus EL, (hoc eſt minus FA) ad FA minus AB.

Sed, ob circulum, rectangulum FEP, æquale eſt rectangulo AFD, eſtque ut EF, ad FA, ita DF, (ſive DA minus AF,) ad EP (hoc eſt EF minus FP, vel AB,) Quatuor igitur rectæ DA, FE, FA, AB,

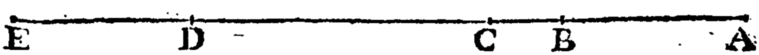
habent

habent conditiones lemmatis 7. ideoque ſunt in continuâ proportione. Quod erat demonſtrandum.

DE
PROBLEMATUM SOLIDORUM
CONSTRUCTIONE
PER EASDEM LINEAS
IISDEM INFINITIS MODIS.

QVomodo æquationum cubicarum varietas ad tres omninò formulas reducatur, jam ab aliis oſtenſum eſt: Affectas ſcilicet ſub latere affirmativè, vel negativè, & amphibolas... Illas per totidem problemata, ſuperiori methodo, conſtruemus, quamvis duarum mediarum inventione, & anguli triſectione, non ignoremus rem fortaſsè brevius abſolvi potuiſſe. Sed methodi varietatem & amplitudinem, ſic oſtendere maluimus; quam qui perceperit, ad aliorum Problematum caſus, etiam in quibus affectio ſub quadrato eſt, non difficulter applicabit.

LEMMA DECIMUM.



In rectâ EA, ſi fuerit ut EA, ad AD, ita CA, ad AB; ut EA, ad AD, ita rectangulum ACE, ad rectangulum ex AC, in BD.

CUm enim ſit ut EA ad AD, ita CA, ad AB; erit permutando, ut EA, ad CA, ita AD, ad AB; & dividendo, ut EC, ad CA, ita DB, ad BA: rectangulum igitur ex DB, in CA, æquale erit rectangulo ex EC, in BA. Sed ut AB ad AC, ita (ſumtâ communi altitudine EC) rectangulum ex BA in EC, ad rectangulum ACE: Igitur

ut

ut BA, ad AC, ita rectangulum ex DB in CA, ad rectangulum ACE, ſive ut rectangulum ACE, ad rectangulum ex DB in CA; ita CA, ad AB, hoc eſt, ex hypotheſi, EA ad AD. Quod erat demonſtrandum.

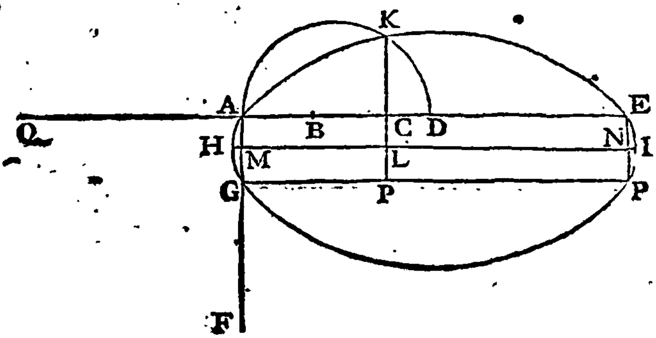
PROPOSITIO SEPTIMA.

Lineam datam QD, ſectam in A iterum ſecare in C, ut ſit eadem ratio quadrati QA, ad quadratum AC, quæ eſt AC ad CD; per circulum & Ellipſim infinitis modis. Eſt autem paradigma æquationis cubicæ, affectæ ſub latere, affirmativè.

Fiat ſuper AD, ſemicirculus AKD, & à parte contrariâ erigatur in puncto A, normalis AF æqualis AQ, ac in eâ ſumatur quodlibet punctum G, tum producatur AD in E, donec AD, ſit ad AE, ut GF, ad FA; & perficiatur parallelogrammum GAER, diviſiſque AG, ER, bifariam in M, & N, jungatur NM, & producatur in H, itaut rectangulum NHM, ad quadratum MA, eam habeat rationem, quam habet AF, ad FG, ſumaturque NI in directum, æqualis HM. Tum axe HI, latere recto quod ad HI eandem habeat rationem, quæ eſt FG, ad FA, deſcribatur ſemi-ellipſis HAKI. Quæ tranſibit per A, & E, ut patet ex conſtructione, ſecabitque circulum in aliquo puncto ut K. Cadat ex illo in AD normalis KC.

Dico ita eſſe quadratum QA, ad quadratum CA, ut AC, ad CD. Producatur KC, uſque dum ſecet rectas NM, GR, in L & P, fiatque ut EA, ad DA, ita CA ad AB.

Ex iis, quæ propoſitione primâ oſtenſa ſunt, eadem eſt ratio rectanguli ECA, ad rectangulum PKC, quæ lateris tranſverſi ellipſeos ad rectum, ſive AF, ad FG, hoc eſt EA, ad AD (ex conſtructione). Sed ex lemmate 10. ut EA, ad AD, ita rectangulum ECA, ad rectangulum ex AC, in BD; rectangulum igitur ex AC in BD, æquale erit rectangulo PKC. Sed rectangulum ex AC, in BD, æquatur duobus rectangulis ACB, DCA; rectangulum verò PKC, æquale eſt rectangulo PCK, unà cum quadrato CK: duo igitur rectangula ACB, DCA, æqualia ſunt rectangulo PCK, cum quadrato CK. Sed rectangulum DCA, eſt etiam æquale quadrato CK, (ob circulum). Igitur,

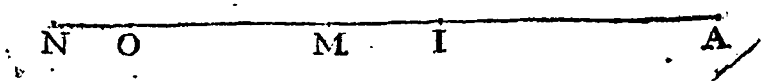


Igitur, demtis æqualibus, remanebunt æqualia rectangula ACB, PCK, eritque ut PC ad CB, ita CA, ad CK. Sed cum ſit ut AF, ad FG, ita EA, ad AD, ſive CA, ad AB, (ex conſtructione) erit per converſionem rationis, ut AF, ad AG (ſive CP) ita CA, ad CB, & permutando, ut AF, ad CA, ita CP, ad CB. Sed ex oſtenſis ut CP, ad CB, ita CA, ad CK. Igitur ut AF, ad CA, ita CA, ad CK. Tres igitur AF (ſive AQ) AC, CK, ſunt in continua proportione. Eſtque ut quadratum AQ, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad quadratū CK, hoc eſt (ob circulum) AC ad CD. Quod erat demonſtrandum.

Idem accideret ſi in rectâ AF, in infinitum productâ ultra F, ſumeretur punctum G. Non enim difficilior eſt demonſtratio, quam, ut in propoſitione primâ, lectoris ingenio relinquimus.

Conſtruximus itaque Problema, per circulum & Ellipſim, infinitis modis. Quod erat faciendum.

LEMMA UNDECIMUM.



In rectâ AN ſectâ in punctis I, M, O, ſi fuerit ut AM, ad MN, ita OM, ad MI, erit ut AM, ad MN, ita rectangulum AOM, ad rectangulum ſub NI, & OM.

Cum enim ſit ut AM, ad MN, ita OM, ad MI, erit permutando, ut AM, ad OM, ita MN, ad MI, & componendo, ut AO, ad MO,

MO, ita NI, ad MI, & rurſus permutando, ut AO, ad NI, ita MO, ad MI. Sed ut MO, ad MI, ita eſt (ex hypotheſi) AM, ad MN: Igitur ut AM, ad MN, ita AO, ad NI; & ſumtâ communi altitudine OM, ita rectangulum AOM, ad rectangulum ex NI, in OM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Idem, infinitis modis, per circulum & Hyperbolam abſolvere.

DEtur itaque recta QD, ſecta in B, ita ſecanda in C, ut quadratum QB, ad quadratum BC, habeat rationem BC, ad CD. Fiat rurſus ſuper BD, ſemicirculus, erectaque à parte oppoſitâ, normalis BZ, æqualis BQ, producatur utcumque in X; & perficiatur rectangulum XBDR; ſectiſque BX, DR, bifariam in M, & N, jungatur NM, & producatur in A, itaut ſit eadèm ratio NM, ád MA, quæ XZ, ad ZB. Tum (ſiquidem fieri poſſit) recta AM, ſecetur, in G, ut rectangulum AGM, ad quadratum MB, eandem habeat rationem, quam habet BZ, ad ZX; & ipſi MG, ſumatur æqualis AH. Demum, axe HN, vertice G, latere tranſverſo HG, recto verò, quod ad HG, ſit ut XZ, ad ZB, deſcribatur ſemi-hyberbola GBE: tranſibit enim per B, cum ponatur eadem ratio rectanguli AGM, vel HMG, ad quadratum MB, quæ BZ, ad ZX, ſive lateris tranſverſi, ad rectum: ſecabit etiam circulum in E, ex quo cadat in BD normalis EC.

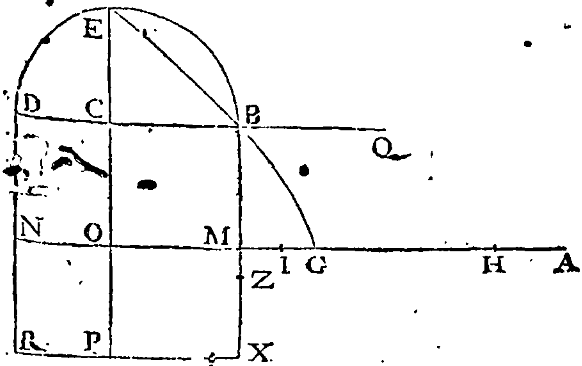
Dico eſſe ut quadratum QB, ad quadratum BC, ita BC, ad CD.

Producatur EC, uſque dum ſecet parallelas MN, XR in punctis O, & P. Tum fiat ut AM, ad MN, ita OM, ad MI.

Ex iis quæ propoſitione 2. oſtenſa ſunt, rectangulum AOM, ad rectangulum PEC, eandem habet rationem, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum; ſive BZ, ad ZX, vel AM, ad MN, (ex conſtructione). Sed eandem etiam rationem habet idem rectangulum AOM, ad rectangulum ſub NI, OM, * Igitur rectangulum ſub NI, & OM, æquale erit rectangulo, PEC. Eſt autem rectangulum ſub NI, & OM, æquale duobus rectangulis NOM, IOM: rectangulum verò PEC, rectangulo PCE, unà cum quadrato CE. Igitur rectangulum NOM, (vel BCD,) cum rectangulo IOM, æquale eſt rectangulo PCE, cum

** per lemma undecimum.*

quadrato



quadrato CE. Sed rectangulum BCD, eſt etiam æquale quadrato CE (ob circulum:) Igitur ablatis hinc inde æqualibus BCD rectangulo, & CE quadrato, remanebunt æqualia rectangula, IOM, PCE. Eritque ut PC, ad OI, ita MO, (vel CB,) ad CE.

Nunc (ex conſtructione) ut XZ, ad ZB, ita NM ad MA, vel IM, ad MO: erit igitur componendo, ut XB, ad BZ, ita IO, ad MO, & permutando, ut XB, (vel PC,) ad IO, ita BZ, (vel BQ,) ad MO, vel BC.

Sed ut PC, ad IO, ita jam demonſtratum eſt eſſe CB, ad CE; igitur ut BQ ad BC, ita BC, ad CE, & ut quadratum BQ, ad quadratum BC, ita quadratum BC, ad quadratum CE, hoc eſt (ob circulum) ita BC, ad CD. Quod erat &c.

Si recta AM, ita ſecari non poſſet, quemadmodum in conſtructione imperatum eſt; tunc BX, ſecanda eſſet, eâdem planè methodo, qua propoſitione 2. uſi ſumus, & quam qui intellexerit facilè ad hujus propoſitionis caſum applicabit: ideoque monuiſſe ſufficiat.

Addo tantum, ſi punctum G, inciderit in medium ipſius AM, Tunc rectam ex puncto G, per B ductam, ſecturam circulum in puncto E quæſito, ut demonſtrationis veſtigia repetenti conſtabit. Solvetur itaque Problema ſolidum per lineam & circulum. Hoc mirum foret, inquam, ſi non caſu, ſed arte, in punctum X incidiſſes. At illud arte invenire, non minoris eſt difficultatis quàm ipſum Problema ſolvere. Experire, & cùm in illud incideris (neglectâ rectâ GBE) junge dumtaxat rectam XD, & ex Z, duc ipſi parallelam, illa enim incurret in punctum C quæſitum. Quod breviter oſtendo.

Quoniam punctum G, biſecat rectam AM (ex hypotheſi) erit rectangulum AGM, pars quarta quadrati AM. Ponitur autem ita

eſſe BZ, ad ZX, ut rectangulum AGM, ad quadratum BM: Igitur ſumtis conſequentium quadruplis erit ut BZ, ad ZX, ita quadratum AM; ad quadratum BX. Sed ut BZ, ad ZX, ita AM, ad MN (ex conſtructione): igitur ut quadratum AM, ad quadratum BX, ita AM, ad MN, ſunt itaque tres proportionales AM, BX, MN vel BD: Eſtque rurſus ut AM, ad MN, vel BD, ita quadratum BX, ad quadratum BD, hoc eſt (cum ZC, ponatur parallela XD,) ita quadratum BZ, ad quadratum BC. Sed ut AM, ad MN, ita, rurſus, ex conſtructione, BZ, ad ZX, hoc eſt (ob parallelas XD, ZC,) ita BC, ad CD. Igitur ut quadratum BZ, (vel BQ) ad quadratum BC, ita BC, ad CD. Quod erat &c.

Conſtruximus itaque Problema per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO NONA.

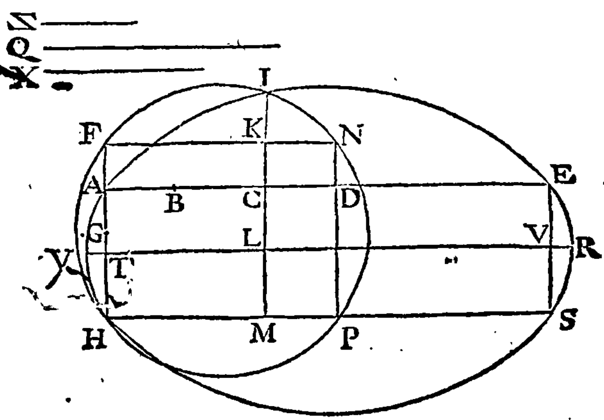
Datis duabus rectis Z, & Q, invenire tertiam ut X, ad cujus quadratum eandem habeat rationem quadratum Z, quæ eſt ipſius X, ad utramque Q & X. Eſt autem paradigma æquationis, cubicæ affectæ ſub latere negativè.

SUmatur FN, æqualis Q, & erigatur FH, dupla Z, biſecta in G. Tum in rectâ GF, (vel eadem verſus F in infinitum productâ) ſumto quolibet puncto A, ducatur AD parallela & æqualis FN, & ſecetur vel producatur in E, ita ut ſit eadem ratio AD, vel AE, quæ eſt AG, ad GH, perfectoque rectangulo HAES, biſecentur rectæ AH, ES, in T, & V, ductaque TV, producatur in R, itaut rectangulum TRV, ad quadratum VE, eandem habeat rationem, quam HG, ad GA, & productâ VT, in Y, donec TY, ſit æqualis VR, ſuper axe YR, deſcribatur ſemi-ellipſis YIR, in quâ ratio lateris tranſverſi ad rectum, ſit eadem quæ HG, ad GA; tranſibit illa per A, & E, (ex conſtructione) & ſecabit circulum, vel ſupra, vel infra N, vel in ipſo puncto N. Secet primò ſupra, in puncto I, & ex I, demittatur in FN, normalis IK.

Dico FK, æqualem eſſe lineæ X, quæſitæ; ſive ita eſſe quadratum FG, ad quadratum FK, ut FK, ad duas FN, FK.

Produ-

Producatur IK, uſque dum ſecet parallelas AE, TV, HS, in C, L, M. Fiatque ut EA, ad DA, ita CA, ad BA.



Nunc (ob ellipſim) eadem erit ratio rectanguli ECA, ad rectangulum MIC, quæ eſt lateris tranſverſi, ad rectum, ſive HG, ad GA, vel EA, ad DA, (ex conſtructione): Sed ut EA, ad DA, ita rectangulum ACE, ad rectangulum ex AC in BD *: Igitur rectangulum ex AC, in BD, æquale erit rectangulo MIC. Sed rectangulum ex AC, in BD, æquale eſt duobus rectangulis DCA, ACB: rectangulum verò MIC, duobus MIK, & MI in KC. Itaque duo rectangula DCA, ACB, erunt æqualia duobus MIK, & MI in KC; & cùm rectangulum DCA ſive PMH, ſit æquale rectangulo MIK, (ob circulum): ablatis æqualibus, remanebunt æqualia, rectangula ACB, MI, KC: Eritque ut KC, ad CB, ita CA, ad MI.

** per lemma decimũ*

Nunc, ut HG, ſive FG, ad GA, ita EA, ad DA, & CA, ad AB (ex conſtructione) Igitur per converſionem rationis ut FG, ad FA, (ſive KC), ita CA, ad CB: & permutando, ut FG, ad CA, ita KC, ad CB. Sed ut KC, ad CB, ita oſtenſum eſt eſſe, AC, ad IM; Igitur ut FG, ad CA, ita CA, ad IM; & ut quadratum FG, ad quadratum CA, ita quadratum CA, ad quadratum IM (ſive ad duo rectangula MIK, IMK). Sed ulterius cum tres FG, CA, IM, demonſtratæ ſint proportionales, rectangulum ſub FG, IM, erit æquale quadrato CA, & ſumptis duplis rectangulum ſub duplâ FG (hoc eſt FH vel KM ex conſtru-

conſtructione) in IM, æquabitur duplo quadrato AC, rectangulum vero MIK, æquale etiam eſt rectangulo DCA, Igitur additis æqualibus rectangulum DCA, cum duplo quadrato AC, æquale eſt duobus rectangulis IMK, MIK; & cum rectangulum DCA, cum duplo quadrato CA, æquetur rectangulo DAC, cum quadrato AC, rectangulum DAC cum quadrato AC, æquale erit duobus rectangulis IMK, MIK, ſive quadrato IM.

Demonſtratum verò eſt, eſſe ut quadratum FG, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad quadratum IM. Erit igitur ſimiliter ut quadratum FG, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad rectangulum DAC cum quadrato AC, hoc eſt (demtâ communi altitudine AC) ita recta AC, ad duas DA, AC. Et conſequenter ut quadratum FG, ad quadratum FK, ita FK, ad duas FN, FK. Quod erat demonſtrandum.

Si punctum I, caderet infra N, normalis ex I in FN productam, daret rectam quæſitam, ut prius; cujus demonſtratio ſuperiori ſimilis eſt.

Si verò tranſiret per N, tum ipſa FN eſſe recta quæſita. Quo caſu patet quadratum rectæ GF, ſubduplum eſſe quadrati rectæ FN. Itaque ex his datis ſolvi poteſt Problema ſine ulla conſtructione. Quod fuſius proſequi, noſtri non eſt inſtituti.

Eadem eſſet demonſtratio ſi punctum A ultra F, in GF productâ ſumtum eſſet, ut conſideranti planum fiet.

Conſtruximus itaque Problema per circulum & Ellipſim infinitis modis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO DECIMA.

Propoſitum ſit idem per circulum & Hyperbolam infinitis modis abſolvere.

Sint, eadem quæ prius, rectangulum HFNP, & circa illud circulus: biſectâque NP, in A, ſumatur ultra A, quodlibet punctum G, & perficiatur rectangulum GPHY, biſectiſque etiam GP, in B, & YH, in O, jungatur AO, & ita producatur uſque ad E, ut ſit eadem ratio BE, ad BO, quæ eſt PA, ad AG: Tum ſecetur BE, in D, itaut

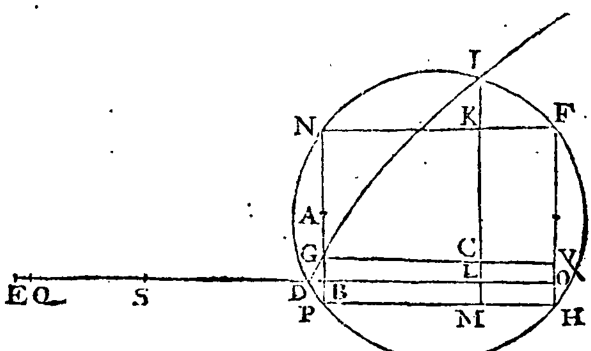
itaut rectangulum EDB, ad quadratum BG, habeat rationem PA, ad AG; & ſumatur EQ, æqualis BD. Demum vertice D, latere tranſverſo DQ, axe DO, deſcribatur Hyperbola, cujus latus tranſverſum ad rectum, ſit in ratione PA, ad AG; & quæ occurrat circulo in puncto I, (occurret enim, & tranſibit per punctum G, ut patet ex conſtructione:) cadat ex I, in HB, normalis IM, ſecans rectas FN, YG, OB, in punctis K, C, L.

Dico NK, eſſe lineam quæſitam; ſive ita eſſe quadratum AN, ad quadratum NK, ut eſt NK, ad utramque ſimul NK, NF,

Fiat ut EB, ad BO, ita LB, ad BS.

Ex ante oſtenſis, rectangulum ELB, ad rectangulum MIC, habet rationem PA, ad AG, ſive EB, ad BO, vel lateris tranſverſi ad rectum. Sed ut EB, ad BO, ita rectangulum ELB, ad rectangulum ſub OS & BL.* Igitur rectangulum ſub OS, & BL, æquale eſt rectangulo MIC. Rectangulum verò ſub OS, & BL, æquale eſt rectangulis SLB, & OLB (ſive HMP) rectangulum autem MIC, æquale etiam eſt duobus MIK, & MI in KC. Itaque duo rectangula SLB, HMP æqualia erunt duobus MIK, & MI in KC. Sed rectangula HMP, MIK, etiam æqualia ſunt (ob circulum): Igitur demtis æqualibus, æqualia remanebunt rectangula SLB, MI in KC, eritque ut KC, ad SL, ita BL, ad MI.

** per lemma undecimum.*



Ulterius, eſt ut PA, ſive NA, ad AG, ita LB, ad BS (ex conſtructione,) erit igitur componendo, ut NG, ad AG, ita LS, ad BS, & per converſionem rationis, ut NG, ſive KC, ad NA, ita SL, ad LB,

 &

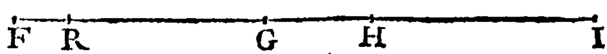
& permutando, ut KC, ad SL ita NA, ad LB. Sed ut KC, ad SL, ita oſtenſum eſt eſſe LB, ad MI; Igitur ut NA, ad LB, ita LB; ad MI; Et ut quadratum NA ad quadratum LB, ita quadratum LB, ad quadratum MI: & cum tres ſint proportionales, rectangulum NA, MI, eſt æquale quadrato LB. Itaque ſumtis duplis rectangulum ſub duplâ NA, in MI (ſive rectangulum KMI,) æquale erit duplo quadrato BL, & additis æqualibus (ob circulum) rectangulis, MIK, BLO; duo rectangula KMI, MIK, (ſive quadratum MI) æqualia erunt rectangulo BLO, cum duplo quadrato BL. Sed rectangulum BLO, cum duobus quadratis BL, æquale eſt rectangulo OBL, & quadrato BL; Igitur quadratum MI, æquatur rectangulo OBL, cum quadrato BL, eſtque eadem ratio BL, ad MI, quæ MI, ad OB cum BL. Et ut quadratum BL, ad quadratum MI, ita BL, ad OB cum BL.

Sed ut quadratum LB, ad quadratum MI, ita demonſtratum eſt ſuperius eſſe quadratum NA, ad quadratum LB; Igitur ut quadratum NA, ad quadratum LB, ita LB, ad duas BL, OB, ſive ut quadratum AN, ad quadratum KN, ita NK, ad duas NK, NF. Quod erat demonſtrandum.

Alios caſus non perſequor, cùm ſcilicet punctum G, cadit ultra P, in lineâ AP, indefinitè productâ. Ex iis enim quæ ante demonſtrata ſunt, illorum conſtructio & demonſtratio ſeſe offeret conſideranti.

Abſolvimus itaque Problema, per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

LEMMA DUODECIMUM.



In recta IK, ſi fuerit ut IG, ad GH, ita GF, ad FR; erit ut IG, ad GH, ita rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, GFR.

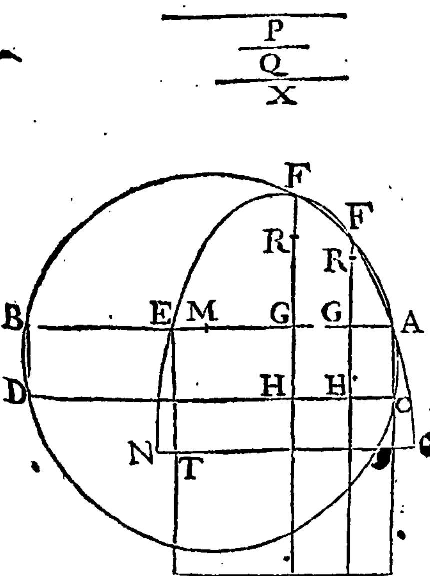
Cum enim ponatur eſſe ut IG, ad GH, ita GF, ad FR, erit permutando & componendo, ut IF, ad GF, ita HG cum FR, ad FR,

FR, & rurſus permutando ut IF, ad HG cum FR, ita FG, ad FR. Sed ut IF, ad HG cum FR, ita ſumtâ communi altitudine FG, rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, RFG, Igitur ut FG, ad FR ſive IG, ad GH (ex conſtructione), ita rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, RFG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Datis duabus rectis P, & Q, invenire tertiam ut X, ad cujus quadratum, quadratum datæ P eandem habeat rationem, quæ eſt ipſius X, ad exceſſum X, ſupra Q. Eſt autem paradigma æquationis cubicæ, affectæ ſub latere, & amphibolæ,

ACcipiatur AB, dupla P, biſecta in M, eique ad rectos AC, æqualis Q: perficiatur rectangulum ACB, & circa illud deſcribatur circulus AFBC. Tum ſumto in MB, etiam indefinitè productâ, quolibet puncto E, producatur AC in K, fiatque ut ME, ad MB, ita AC, ad AK, & perficiatur rectangulum AELK. Biſectiſque AK, EL, bifariam in S, & T, jungatur ST, & producatur in N, itaut rectangulum SNT, ad quadratum TE, eandem habeat rationem, quam EM, ad MB; ſumaturque SO, indirectũ æqualis TN. Tum axe ON, fiat ſemi-ellipſis, in qua ratio axis ON, ad latus rectum, eadem ſit quæ EM, ad MB, tranſibit illa per puncta, A & E, ut evidens eſt ex conſtructione. Si verò occurrat circulo, occurret in uno vel pluri-



pluribus punctis. Occurrat in F, ex quo cadat in AB, normalis FG, quæ producta ſecet parallelas CD, KL, in punctis H, & I.

Dico FG, eſſe æqualem X, quæſitæ, ſive ita eſſe quadratum BM, ad quadratum FG, ut FG, ad exceſſum FG ſupra AC, vel GH.

Fiat ut BM ad ME, ſive IG, ad GH, ita GF, ad FR.

Nunc (ob ellipſim) eadem erit ratio rectanguli EGA, ad rectangulum IFG, quæ eſt axis ON, ad latus rectum, ſive EM, ad BM, hoc eſt HG, ad GI, ex conſtructione. Sed ut HG, ad GI, ita duo rectangula HGF, GFR, ad rectangulum IFG *, Igitur duo rectangula HGF, GFR, æqualia ſunt rectangulo EGA. Et addito utrimque rectangulo ſub BE & GA, tria rectangula HGF, GFR, BE in GA, æqualia erunt duobus rectangulis EGA, & BE in GA, hoc eſt unico BGA. Sed cum rectæ HG, & FR, æquales ſint rectæ HF minus RG, ſumtâ communi altitudine GF, erunt rectangula HGF, GFR, æqualia rectangulo HFG, minus rectangulo FGR. Igitur rectangulum HFG, minus rectangulo FGR, unà cum rectangulo BE in GA, æquale erit rectangulo BGA, & addito utrimque rectangulo FGR, duo rectangula HFG, & BE in GA, æqualia erunt duobus BGA, FGR. Sed rectangulum BGA, æquale eſt rectangulo HFG (ob circulum), Igitur, ablatis æqualibus, æqualia remanebunt rectangula BE in GA, & FGR, eritque ut BE, ad GR, ita FG, ad GA.

* per lemma duodecimum

Nunc, ex conſtructione, eſt ut BM, ad ME, ita GF, ad FR, erit itaque per converſionem rationis, ut BM, ad BE, ita FG, ad GR; & permutando, ut BM, ad FG, ita BE, ad GR. Sed ut BE, ad GR, ita FG, ad GA (ex ante demonſtratis); Igitur ut BM, ad FG, ita FG ad GA, & ut dupla BM (ſive BA) ad duplam FG, ita FG, ad GA; & per conſequens rectangulum BAG, æquale erit duplo quadrato FG, Sed rectangulum BAG, æquale eſt quadrato AG, unà cum rectangulo BGA (ſive HFG, ob circulum): Igitur quadratum AG, unà cum rectangulo HFG, æquale erit duplo quadrato FG. Eſt autem rectangulum HFG, æquale quadrato FG, cum rectangulo FGH: quadrata itaque AG, FG, cum rectangulo FGH, æqualia erunt duplo quadrato FG, & ablato utrimque quadrato FG, quadratum AG, cum rectangulo FGH, æquale remanebit quadrato FG. Et ablato iterum utrimque rectangulo FGH, quadratum AG, remanebit æquale quadrato FG, minus rectangulo FGH, ideoque erit eadem ratio FG, ad AG, quæ eſt ipſius AG, ad FG minus GH: & ut quadratum FG ad quadratū AG, ita FG ad FG minus GH.

Sed

Sed ut FG ad AG, ita oſtenſum eſt eſſe, BM, ad FG, & ut quadratum FG, ad quadratum AG, ita quadratum BM, ad quadratum FG. Igitur ut quadratum BM, ad quadratum FG, ita FG, ad FG minus GH; ſive ita FG, ad exceſſum FG, ſupra AC. Quod erat demonſtrandum.

Determinationem Problematis & numerum radicum lectoris induſtriæ relinquo, cum hæc fuſè ab aliis oſtenſa ſint.

Sufficit nunc Problema per circulum & Ellipſim infinitis ut propoſitum eſt modis abſolviſſe. Quod erat faciendum.

LEMMA DECIMUM-TERTIUM.

Sumtis in rectâ IK, tribus punctis G, H, F, ſi fuerit ut GH, ad GI, ita FG, ad GK, erit ut GH, ad GI, ita rectangulum GFH, ad rectangulum KGF, minus rectangulo IGF.



CUm enim ſit ut GH, ad GI, ita FG, ad GK, erit convertendo & permutando, ut FG, ad GH, ita GK, ad GI, & dividendo ut FH, ad HG, ita GK minus GI, ad GI, & rurſus permutando ut FH, ad GK minus GI, ita GH, ad GI. Sed ut FH, ad GK minus GI, ita, ſumtâ communi altitudine FG, rectangulum GFH, ad rectangulum KGF, minus rectangulo IGF. Igitur ut GH, ad GI, ita rectangulum GFH, ad rectangulum KGF, minus rectangulo IGF. Quod erat demonſtrandum.

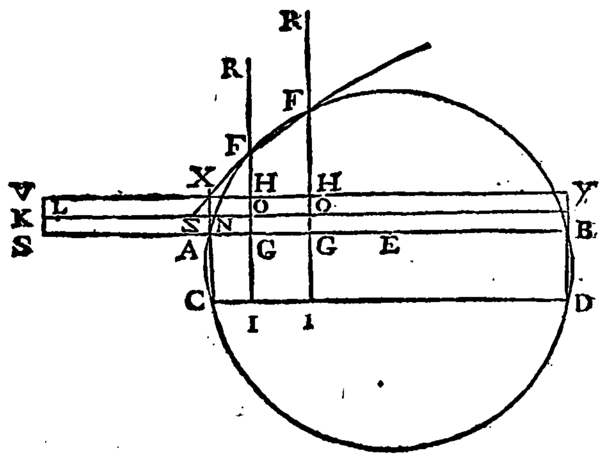
PROPOSITIO DUODECIMA.

Idem per circulum & Hyperbolam iiſdem modis efficere.

SUmtâ rurſus AB, duplâ P, biſectâ in E, & AC normali, æquali Q, fiat rectangulum CABT, & circa illud circulus, productâque

BA quantumlibet in S, producatur item CA, in X, itaut ſit CA, ad AX, quemadmodum SE, ad EA, perfectiſque rectangulis SAXV, XAYB, ſecentur XA, VS, bifariam in K, & N, junctaque KN dividatur in Z, itaut rectangulum KZN, ad quadratum NX, eam habeat rationem, quam habet CA, ad AX: ſumtâque KL, æquali ZN, vertice Z, axe ZN, latere tranſverſo LZ, recto verò, ad quod illud ſe habeat ut CA, ad AX, deſcribatur ſemi-hyperbola ZXF, quæ utique tranſibit per X, ex conſtructione, & ſiquidem occurrat circulo, id fiet in uno, vel pluribus punctis. Occurrat in F, unde demittatur in CT, normalis, FI, ſecans parallelas XY, KN productam, & AB, in punctis H, O, G.

Dico FG, eſſe Z quæſitam; ſive ita eſſe quadratum AE, ad quadratum FG, ut FG, ad exceſſum FG ſupra AC.



Fiat ut HG, ad GI, ita GF ad GR.

Quoniam itaque punctum F, eſt ad Hyperbolam, erit ex ſæpè
*per oſtenſis, eadem ratio rectanguli GFH, ad rectangulum KON, quæ
lemma eſt lateris recti, ad tranſverſum, ſive XA, ad AC, ex conſtructione,
decimũ vel HG, ad GI. Sed ut HG, ad GI, ita idem rectangulum GFH, ad
tertiũ. rectangulum RGF, minus rectangulo IGF*: Igitur rectangulum

KON,

KON, ſive SGA, æquale eſt rectangulo RGF, minus rectangulo IGF. Sed rectangulum BGA eſt etiam æquale rectangulo IFG (ob circulum); Itaque additis æqualibus, duo rectangula SGA, BGA, ſive unicum SB in GA, æquatur rectangulo RGF, minus rectangulo IGF, unà cum rectangulo IFG; & cum rectangulum IFG æquale ſit rectangulo IGF unà cum quadrato FG; ſequitur rectangulum SB in GA, æquale eſſe rectangulo RGF, cum quadrato GF, hoc eſt rectangulo ex RG cum GF, in GF. Eſt itaque ut SB, ad RG cum GF, ita GF, ad GA.

Nunc ut IG, ad GH, ſive CA, ad AX, ita SE, ad AE, ex conſtructione: Igitur ut SE, ad AE ita RG, ad GF ex eadem. Et componendo ut SE cum AE, ſive ut SB, ad AE, ita RG cum GF, ad GF & permutando ut SB, ad RG, cum GF, ita AE ad GF. Sed ut SB, ad RG cum GF, ita oſtenſum eſſe GF, ad GA; erit itaque ut AE, ad GF, ita GF, ad GA. Et ſumtis antecedentium duplis, ut dupla AE, ſive AB, ad GF, ita dupla GF, ad GA. Rectangulum igitur BAG, æquale erit duplo quadrato GF. Sed rectangulum BAG, æquale eſt rectangulo BGA, cum quadrato AG. Itaque rectangulum BGA, cum quadrato GA, æquale erit duplo quadrato GF. Eſt autem rectangulum BGA, æquale rectangulo IFG, ſive rectangulo IGF, cum quadrato GF; Igitur quadratum GA, unà cum rectangulo IGF, & quadrato GF, æquale erit duplo quadrato GF, ſive ablato utrimque quadrato GF, rectangulum IGF, cum quadrato GA, æquabitur quadrato GF, & ablato utrimque rectangulo IGF, quadratum GA, æquale erit quadrato GF, minus rectangulo IGF, hoc eſt æquale erit rectangulo, ex GF, in GF minus IG. Erit itaque ut GF, ad AG, ita GA, ad GF minus IG.

Sed ut GF, ad GA, ita oſtenſum eſt eſſe AE, ad GF; igitur ut AE, ad GF, ita GF, ad GA, & GA, ad GF minus IG. Et ut quadratum AE, ad quadratum GF, ita GF, ad GF minus IG, hoc eſt ad exceſſum GF, ſupra AC. Quod erat demonſtrandum.

Reliqui caſus facilè conſtruentur & demonſtrabuntur, ex iis quæ propoſitione ſecundâ & aliis oſtenſa ſunt. Determinationem verò Problematis, ut prius, lectori relinquimus.

Conſtat itaque nos id quod propoſitum erat per circulum & Hyperbolam infinitis modis effeciſſe. Quod erat faciendum.

Quoniam verò anguli triſectione, & duarum mediarum inter datas inventione, omne Problema ſolidum ſolvi poteſt; Non alienum ab hac materiâ viſum eſt, anguli triſectionum per circulum & Hyperbolam demonſtrare: ut ad inveſtigandas methodo ſuperiori infinitas Ellipſes & Hyperbolas, quæ cum circulo idem præſtant, lectorem excitemus. Sit itaque

PROPOSITIO DECIMA-TERTIA.

Angulum datum ſecare triſariam.

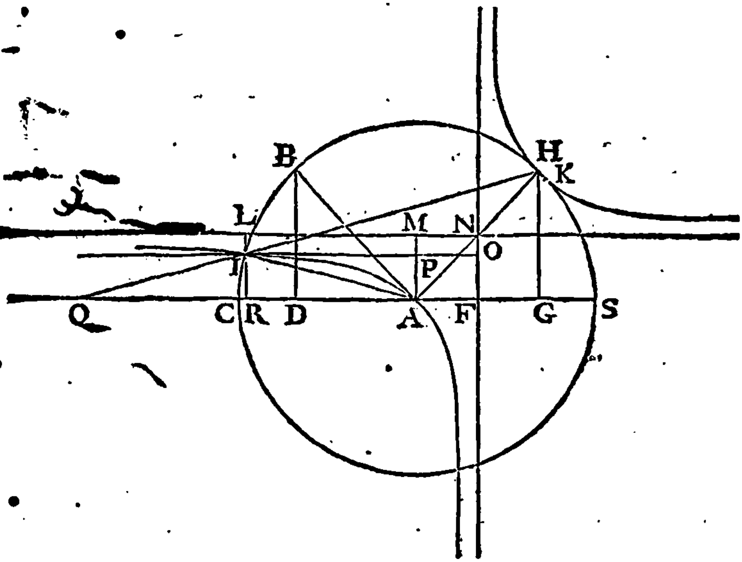
Datus ſit angulus BAC, ſecandus triſariam. Centro A intervallo quolibet ut AC, deſcribatur ſemicirculus, qui ſecet CA productam in S, & AB, in B. Et ex B, in AC cadat normalis BD, tum ex AS, reſecetur AF, æqualis dimidiæ AD, erectâque FN, æquali dimidiæ DB, & eidem parallelâ, ducatur NL, parallela AD. Demum circa aſymptotos NF, NL, deſcribatur hyperbola tranſiens per punctum A, quæ ſecet circulum I, & jungatur AI.

Dico angulum IAC, ſubtriplum eſſe anguli BAC.

Sumatur AG, æqualis AD, & erigatur ad circulum normalis GH, quæ utique erit æqualis DB, junctiſque HA, HI, producatur HI, donec occurrat lineæ AC productæ, in punctò Q. Tum perficiatur rectangulum FN, MA, & ex puncto I, cadat in AC, normalis IR, quæ producta ſecet NM in L.) Et in FN normalis IO, ſecans MA, in P.

Quoniam igitur duo puncta I, & A, ſunt in eâdem Hyperbolâ, & ex illis ductæ ſunt ad aſymptotos parallelæ IL, AM, & IO, FA, erit rectangulum OL, æquale rectangulo FM: & ablato communi rectangulo OM, additoque utrimque rectangulo AI, rectangulum FI, æquale erit rectangulo AL; Itaque erit eadem ratio LR, ad FR, quæ eſt RI, ad RA; & ſumtis duplis, ut dupla LR, ſive DB, hoc eſt HG, ad duplam FR, ita RI, ad RA. Sed dupla FR, æqualis eſt duplæ AF (hoc eſt AG) & duplæ AR. Igitur dupla RF, æqualis erit GA cum dupla AR, hoc eſt GR cum RA. Erit igitur ut HG, ad GR cum RA, ita RI, ad RA, & permutando ut HG, ad RI, ita GR cum RA, ad RA.

Sed ut HG, ad RI, ita GQ, ad RQ; igitur ut GR cum RA, ad RA, ita



ita GQ, ad RQ, & dividendo, ut GR, ad RA, ita eadem GR, ad RQ. Sunt ergo æquales AR, RQ. Sed anguli ad R ſunt recti, & RI communis, igitur æquales quoque ſunt rectæ IA, IQ & anguli IAR, IQR, & conſequenter angulus externus HIA, duplus eſt anguli IQC. Sed angulus HIA æqualis eſt angulo AHI, ob æquales AH, AI; itaque angulus AHI, duplus erit anguli IQC, & cum angulus HAS, ſit etiam æqualis duobus AHQ, HQA, erit angulus HAS, triplus anguli IQA vel IAQ. Sed angulus HAS, æqualis eſt angulo BAC, ex conſtructione. Conſtat itaque angulum BAC triplum eſſe anguli IAC. Quod erat demonſtrandum.

Eodem modo deſcriptâ per punctum H, ſectione oppoſitâ HK, occurrente circulo in K oſtendetur (ducta AK) angulum KAS, eſſe ſubtriplum anguli SAB, reſidui ad duos rectos; ſive quod idem eſt, arcum SK, eſſe tertiam partem arcus SB; & per conſequens arcum KI, eſſe duas tertias ſemiperipheriæ; ſive tertiam partem integræ circumferentiæ.

APPENDIX

De ſolutione eorundem Problematum per circulum & Parabolam.

Parabolas, quæ cum circulo Problemata ſolida ſolvant, infinitas non eſſe, velut ſunt Ellipſes, & hyperbolæ penitior, illarum linearum contemplatio ſatis oſtendit. Duas, quæ ſeſe offerunt, breviter indicabimus, in Problemate primo.

ITaque (repetito ejus Schemate) Quoniam oſtenſum eſt tres CA, EF, EA, eſſe proportionales, & CA data eſt (ex conſtructione) patet punctum F, eſſe ad parabolam cujus vertex eſt A, axis AF, & latus rectum eadem AF.

Similiter, quoniam etiam tres AE, EF, AD, demonſtratæ ſunt proportionales, & AD data eſt, ſequitur idem punctum F, eſſe ad parabolam, cujus vertex A, axis AD, & latus rectum eadem AD.

Quæ obſervatio ad ſex primas propoſitiones adſtringitur, ſed non difficulter, duas ſaltem parabolas, quæ propoſito ſatisfaciant in propoſitionibus 7. 8. 9. 10. 11. 12. eodem modo reperies.

An verò non aliæ quoque ad hanc effectionem, cum circulo adhiberi poſſunt. Imò aliæ quoque, ſed non infinitè, unam damus in exemplum.

PROPOSITIO DECIMA-QUARTA.

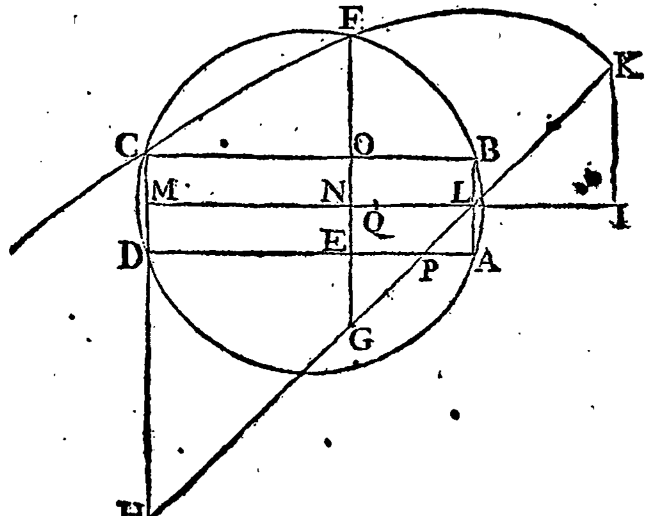
Inter extremas datas, duas medio loco proportionales invenire, per circulum & parabolam.

SInt duæ datæ AD, major, AB minor, & ex iis rectangulum AB CD, ac circa illud circulus. Secentur AB, CD, bifariam in L, & M, & junctâ LM, ſumatur in eâ LQ, æqualis AB: & ſumtâ AP, in AD, æquali LA, jungatur LP, & producatur donec cum CD, pariter productâ, concurrat in H. Tum producatur etiam ML, in J, itaut ſit

ſit eadem ratio QM, ad CH, quæ CH, ad MI, erectâque in I, normali, quæ cum HL productâ, concurrat in K, vertice K, diametro KH, deſcribatur parabola, cujus una applicatarum ſit HC, & quæ circulum ſecet in F; unde cadat in AD, normalis FE, ſecans parallelas BC, LM, in O, & N, & quæ producta occurrat LH, in G.

Dico quatuor AD, FE, EA, AB, eſſe continuè proportionales.

Quadratum enim CH, eſt æquale duobus quadratis HM, MC, unà cum rectangulo ex HM in duplam MC. Sed HM, eſt æqualis ML, & LQ eſt dupla MC, (ex conſtructione;) igitur quadratum CH, eſt æquale quadrato LM, cum quadrato MC, & rectangulo MLQ. Quadratum verò CH, eſt æquale rectangulo IMQ (etiam ex conſtructione) Itaque rectangulum IMQ, eſt æquale quadratis LM, MC, cum rectangulo MLQ. Sed rectangulum IMQ, eſt æquale rectangulo ex IL in MQ, cum rectangulo LMQ, hoc eſt cum quadrato LM, minus rectangulo MLQ:) Igitur rectangulum ex IL, MQ, cum quadrato LM, minus rectangulo MLQ, erit æquale quadratis ML, MC, cum rectangulo MLQ: & ablato utrimque quadrato ML, & addito rectangulo MLQ, rectangulum ILMQ, æquabitur duplo rectangulo MLQ, cum quadrato MC.



Ulterius

Ulterius quoniam duæ CH, FG, ſunt applicatæ ad diametrum parabolæ, erit ut quadratum CH, ad quadratum FG, ita HK, ad GK. Sed ut HK, ad GK, ita MI, ad NI (ob parallelas): Igitur ut quadratum CH, ad quadratum GF, ita MI, ad NI, vel ſumtâ communi altitudine MQ, ita rectangulum IMQ, ad rectangulum ſub IN, MQ, & permutando, ut quadratum CH, ad rectangulum IMQ, ita quadratum GF, ad rectangulum ſub INMQ. Eſt autem quadratum CH, æquale rectangulo IMQ (ex conſtructione). Igitur quadratum FG, æquale etiam erit rectangulo INMQ. Sed rectangulum INMQ, eſt æquale rectangulis ex ILMQ, & LNMQ: ex oſtenſis verò rectangulum ILMQ, æquatur duplo rectangulo MLQ, cum quadrato MC. Igitur quadratum FG, æquale erit rectangulo LNMQ, cum duplo rectangulo MLQ, & quadrato MC. Et cum rurſus rectangulum LNMQ, æquale ſit duobus LNM, LNQ, ſequitur duo rectangula LNM, LNQ, cum duplo rectangulo MLQ & quadrato MC, æquari quadrato FG: hoc eſt duobus quadratis GN, NF cum duplo rectangulo GNF. Eſt autem quadratum NF, æquale quadrato NO, vel MC, cum rectangulo EFO, (ſive MNL ob circulum); Igitur duplum rectangulum MLQ, cum rectangulis LNM, LNQ, & quadrato MC, æquabitur quadrato GN cum quadrato MC, & rectangulo MNL, ac inſuper duplo rectangulo GNF: & ablatis utrimque rectangulis MNL, & quadrato MC; duplum rectangulum MLQ, cum rectangulo LNQ æquale erit quadrato GN, (ſive LN,) & duplo rectangulo GNF. Sed rectangulum LNQ, eſt æquale quadrato LN, minus rectangulo NLQ. Et ſimiliter duplum rectangulum GNF, æquale eſt rectangulo ex GN, vel AE, in duplam EF, minus rectangulo ex eadem GN vel NL, in duplam EN (hoc eſt minus rectangulo NLQ, cum LQ ſit dupla NE, ex conſtructione). Igitur duplum rectangulum MLQ, cum quadrato NL, minus rectangulo NLQ, æquale erit quadrato LN, cum duplo rectangulo AEF, minus rectangulo NLQ, & addito utrimque rectangulo NLQ, ablatoque quadrato LN, duplum rectangulum MLQ, æquale erit duplo rectangulo AEF: & ſumtis ſubduplis, rectangulum MLQ, (ſive ABCD ex conſtructione,) æquale erit rectangulo AEF. Eſt igitur ut DA, ad EF, ita EA, ad AB.

Cùm autem (ob circulum) rectangulum EFO, ſit æquale rectangulo DEA, eſt etiam ut EF, ad EA, ita DE (ſive DA minus AE) ad

ad FO (ſive FE minus EO, vel AB). Quatuor igitur rectæ DA, FE, EA, AB, habent conditiones lemmatis octavi, ſunt itaque continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ex demonſtratis evidens eſt, quomodo duæ mediæ inter datas per parabolam & ellipſim vel Hyperbolam, ſæpius infinitis modis inveniantur. Cùm enim tam parabolæ, quàm ellipſes & Hyperbolæ, ut præſcriptum eſt, delineatæ, ſecent circulum in F, patet illas in eodem puncto ſibi occurrere.

Addamus aliud exemplum triſectionis anguli per circulum & parabolam illam, ad quam infinitæ ellipſes vel Hyperbolæ quæ idem Problema ſolvunt, (ut ita dicam) referuntur.

PROPOSITIO DECIMA-QUINTA.

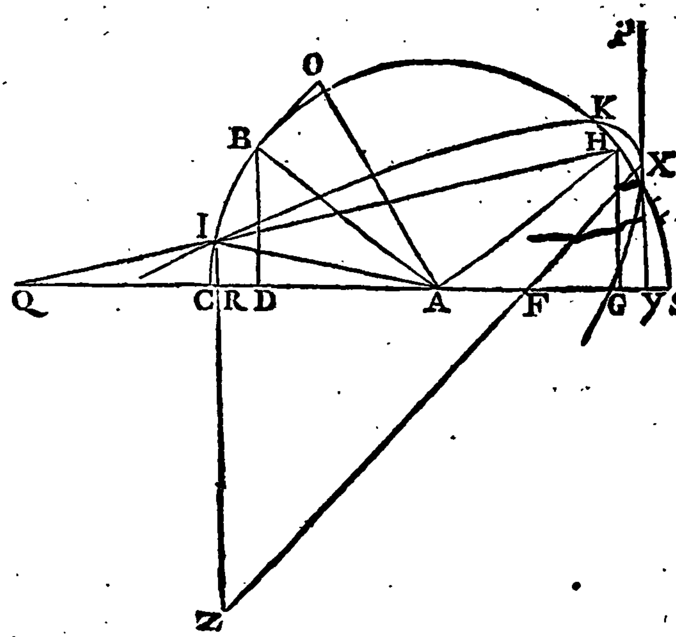
Angulum datum ſecare trifariam per circulum & parabolam.

Sit rurſus, ut in propoſitione 13. datus angulus BAC, ad centrum ſemicirculi SBC, & arcui BC, ſumatur æqualis SH, demiſſiſque normalibus HG, & BD, biſecetur GA, in F; & in B, ductâ tangente BO, æquali FA, jungatur AO. Tum fiat ut utraque BD, DA, ad AO, ita AO, ad AY, indirectum ipſi DA; & in puncto Y erectâ normali indefinitâ YP, inclinetur ad illam FX, angulo ſemirecto. Demum ex YP, reſecetur XP, quæ ad utramque BD, DA, eandem habeat rationem, quam habet YF, ad FX; & vertice X, diametro XF, latere recto XP, deſcribatur parabola, cujus applicatæ ſint parallelæ XP, & quæ occurrat arcui BC in puncto I.

Dico, ductâ AI, angulum IAC, ſubtriplum eſſe anguli BAC.

Demittatur ex I, normalis IR, & producatur donec cum XF etiam productâ, concurrat in Z, jungaturque HI occurrens AC productæ in puncto Q.

Nunc ratio rectanguli PX in XZ, ad rectangulum ex utrâque BD,



DA, in YR, componitur ex ratione XZ, ad YR, (hoc eſt FX, ad FY, ob parallelas YX, ZR,) & ex ratione PX, ad utramque BD, DA; hoc eſt YF, ad FX, ex conſtructione, ſed ex his rationibus componitur ratio FX, ad FX, ſive æqualitatis: Igitur rectangulum ex utraque BD, DA, in YR, æquale eſt rectangulo PXZ, hoc eſt quadrato ZI (ob parabolam). Sed rectangulum ex utraque BD, DA, in YR, æquale eſt rectangulo ex iiſdem BD, DA, in AY, (ſive quadrato AO, vel quadratis AB, AF, ex conſtructione,) unà cum rectangulo ex iiſdem BD, DA, in AR; Itaque duo quadrata AB, AF, unà cum rectangulis BDAR, DAR, æqualia ſunt quadrato IZ: Quadratum verò IZ, æquale eſt quadrato IR, cum quadrato RZ, ſive FR, & duplo rectangulo ZRI, hoc eſt duplo rectangulo FRI. Igitur duo quadrata AB, AF, cum rectangulis BDAR, DAR, æqualia ſunt quadratis IR, FR, cum duplo rectangulo FRI. Eſt autem quadratum FR æquale quadrato AF, cum rectangulo GRA, ſive cum quadrato AR, & rectangulo GAR, vel DAR; Itaque rurſus duo quadrata AB, AF, cum

rectan-

rectangulis BDAR, DAR, æqualia ſunt quadratis IR, AF, AR, cum rectangulo DAR, & duplo rectangulo FRI. Et ablato utrimque rectangulo DAR, & quadrato AF, quadratum AB, cum rectangulo BD, AR, eſt æquale quadratis AR, RI cum duplo rectangulo FRI. Sed duo quadrata AR, RI æqualia ſunt quadrato AI, ſive AB, Igitur rurſus ablatis æqualibus, hinc quadratis AR, RI, inde quadrato AB, remanebunt æqualia rectangulum BD, AR, & duplum rectangulum FRI. Fietque ut BD, ſive HG, ad RI, ita dupla FR, ad RA. Sed cum tres GR, FR, AR, ſint in propoſitione arithmeticâ, dupla FR, æqualis eſt ambabus GR, RA. Igitur ut HG, ad RI, ita GR cum RA, ad RA.

At ut HG, ad RI, ita GQ, ad QR, itaque ut GR cum RA, ad RA, ita GQ, ad QR, & dividendo, ut GR, ad RA, ita GR, ad RQ. Unde ſequitur AR, RQ, eſſe æquales, & cum anguli ad R ſint recti, triangulum AIQ, eſſe iſoſceles: ideoque angulum HIA, duplum eſſe anguli IAC. Et cum angulus AHI ſit æqualis angulo HIA: & utrique AHI, IQA, ſive IAC, æqualis ſit externus angulus HAS, evidens eſt eundem HAS, (ſive BAC, ex conſtructione) anguli IAC, eſſe triplum. Quod erat demonſtrandum.

Non abſimili demonſtratione oſtendi poteſt, cum parabola etiam occurrat arcui SB in K, SK eſſe tertiam partem ejuſdem arcus SB ut in propoſitione 13. Quod indicaſſe ſufficiat.

Oſtenſum eſt in principio hujus Libri, quomodo Problema de duabus mediis ſolvatur ope circuli per infinitas quidem ellipſes vel hyperbolas, ſed non per quamlibet: At idem fieri poſſe cum qualibet ſectione conicâ oſtendit Analyſis. Ac cum parabola, id præſtare etiam pluribus modis, difficile non eſt; hac itaque omiſsâ exemplum dabimus in ſola Ellipſe, ſed quod levi negotio ad hyperbolam aptabitur.

LEMMA ULTIMUM.

Si fuerint duæ ſeries quatuor quomodocumque proportionalium, & extremæ ac mediæ unius ſeriei, ſint in eadem ratione cum extremis ac mediis alterius; erunt & reliquæ in iiſdem rationibus.



SInt quatuor quomodocumque proportionales Q, B, D, N, & aliæ S, R, P, O, ſitque ut Q, ad N, ita S, ad O, & ut B, ad D, ita R, ad P; dico eſſe ut Q ad B, (ſive D ad N ex hypotheſi,) ita S ad R, (ſive P ad O, ex eâdem.)

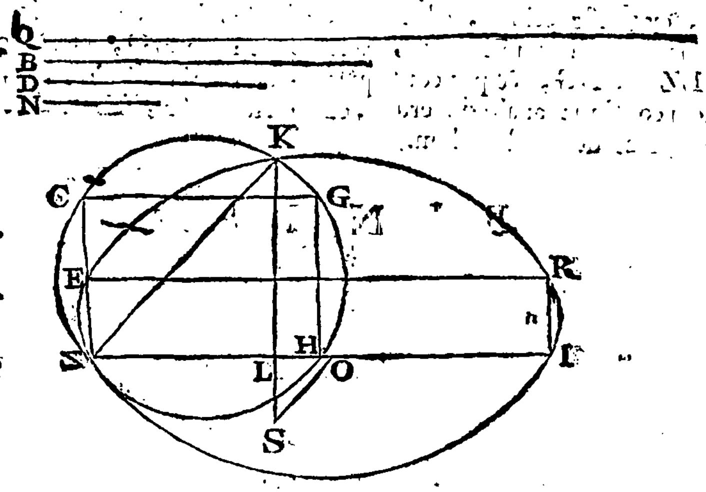
Cùm enim ratio Q ad N, componatur ex ratione Q ad B, & ex ratione B ad D, ac D ad N; hoc eſt ex duabus rationibus Q ad B (ex hypotheſi), & ex ratione B ad D: & ſimiliter ratio S ad O, æqualis rationi Q ad N, componatur eodem modo, ex duabus rationibus S ad R, & ex ratione R ad P, ratio verò R ad P, ſit æqualis rationi B ad D; ſequitur, ablatis utrimque æqualibus, duas rationes Q ad B, æquales eſſe duabus S ad R; & ſumtis ſubduplis, rationem Q ad B, ſive D ad N, æqualem eſſe rationi S ad R, ſive P ad O. Quod erat &c.

PROPOSITIO ULTIMA.

Datâ qualibet Ellipſe, inter extremas datas, ope circuli duas medias proportionales invenire.

DAtæ ſint extremæ B, & D, Ellipſis ERIZ, fiat ut quilibet axis ejuſdem ad latus rectum, ita Q ad B, & ut Q ad B, ita D ad N. Deindè inſcribatur ellipſi rectangulum ZIRE, in quo ratio ZI, parallelæ axi aſſumto, ad IR, ſit eadem quæ Q ad N: tum circa angulum EZI, fiat rectangulum CZHG, æquale priori, in quo ratio ZH, ad HG, ſit eadem quæ eſt B ad D, & circa illud deſcribatur circulus

ſecans



ſecans ellipſim in K, unde demittatur ad ZI, normalis KL; ex quâ (productâ, ſi opus ſit,) reſecetur HS, quæ ad KL, eandem rationem habeat, quam habet B, ad HZ: deindè, junctâ ZK, ducatur eidem parallela SO, occurrens rectæ ZI in O. Dico duas KS, OZ, eſſe medias inter B, & D.

Nam cùm ſit ut Q ad B, ita D ad N, erunt quatuor proportionales Q, B, D, N; cum verò rectangulum ZIRE, æquale ſit rectangulo ZHGC, eſt ut ZI ad ZH, ita GH ad IR; quatuor igitur ZI, ZH, HG, IR, erunt etiam proportionales. Sed, ex conſtructione, ut Q, ad N, ita ZI, ad IR, & ut ZH, ad HG, ita B, ad D, ex eâdem; Igitur, ex præcedenti Lemmate, eadem erit ratio ZI ad ZH, vel HG ad IR, quæ eſt Q ad B, vel D ad N. Sed, rurſus ex conſtructione, ut Q ad B, vel CZ, ad EZ, ita axis ellipſis ad latus rectum ejuſdem; duæ igitur KL, LZ, erunt mediæ proportionales inter ZH, & HG, ex iis quæ Propoſitione primâ hujus demonſtrata ſunt, & quatuor ZH, KL, LZ, HG, erunt in continuâ analogiâ.

Nunc, factum eſt SK ad KL, ut B ad ZH; erit itaque permutando ut B ad SK, ita ZH ad KL; ut autem ZH ad KL, ita (ob parallelas ZK, SO) ſe habet SK ad ZO, tres igitur B, SK, ZO, ſunt in eadem continuâ analogiâ, cum tribus ZH, KL, LZ.

 Sed,

Sed, ex conſtructione, eſt ut ZH, ad HG, ita B, ad D, igitur, ablatis æqualibus rationibus, eadem erit ratio ZO, ad D, quæ eſt LZ ad HG, & per conſequens quatuor B, SK, ZO, D, in eadem continuâ analogiâ erunt, cum quatuor ZH, KL, LZ, HG. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

PARS ALTERA
DE
ANALYSI.

LECTORI GEOMETRÆ S.

LIBERO fidem meam, LECTOR BENEVOLE, quam ante multos annos tibi obligaveram, & Analyſim eorum quæ in Meſolabo demonſtrata ſunt, tandem cenſuræ tuæ ſubmitto. Serius profectò quàm par erat, & quàm apud me conſtitueram: bene tamen mecum actum putarem, ſi quid ad Operis commendationem faceret hæc mora. Sed contrà, tam multa me ab his ſtudiis avocarunt, ut fermè deſperarem, à me colligi, nedum emendari poſſe quæ ſcripſeram, aut quæ animo conceperam, abſolvi. Verùm, ne favore, quem priori Libello benignè impendiſti, omninò indignus viderer, pleraque ſubciſivis horis utcunque diſpoſui: Ratus aliquam vel ſic fortaſſe utilitatem iis allaturum qui hiſce contemplationibus delectantur, & veterum inventis addere, Geometriamque pro-

movere ſatagunt. ἐμοὶ γὰρ τὶ τῶν μὴ εὑρημένων ἐξευρίσκειν, ὅ, τι καὶ εὑρεθὲν κρέσσον ἢ ἀνεξεύρετον, ξυνέσιος δοκέει ἐπιθύμημά τε καὶ ἔργον εἶναι. καὶ τὸ τὰ ἡμιεργα ἐς τέλος ἐξεργάζεσθαι ὡσαύτως. *Mihi enim, intelligentis votum atque opus, eſſe videtur, ea quæ nondum inventa ſunt, & quæ inventa quam non inveniri præſtat, invenire: ac ſimiliter imperfecta ad finem perducere*, ait Hippocrates. *Lib. de Arte.* Quod ut, erudito hoc ſæculo, ab aliis expectari debere, lubens agnoſco; ita an aliquid etiam conferre mihi contigerit, tuum eſto judicium: Ego certè, me, pro captu meo, conatum eſſe, non diffiteor. Vale.

DE ANALYSI.

E Lementa Analyſis Geometricæ, quæ & ſæpius & accuratè à viris doctis tradita ſunt, hic repetere, mei non eſt inſtituti: cùm non artem integram explicare, ſed ea tantùm quæ in Meſolabo demonſtravi retexere, & Geometriam, ſi ſors ita tulerit, promovere mihi propoſuerim. Itaque iiſdem quibus cæteri veſtigiis inſiſtens, regulas ab illis traditas ſuppono: monuiſſe contentus, me, diſtinctionis gratiâ, quantitates ignotas, vocalibus, notas, conſonantibus deſignare ſolere. Et ut ad rem propius accedam, in hoc Problemate de duabus mediis inveniendis inter extremas datas, voco b, majorem, d minorem datarum, ac ſimiliter a, majorem, e, minorem mediarum, ut ſit analogiſmus $b / a / e / d$. Ex quo has æquationes colligo, $be \parallel aa.\ da \parallel ee.\ ae \parallel bd.$ *Duæ mediæ proportionales.*

Prima & ſecunda eſt ad Parabolam, tertia ad Hyperbolam circa Aſymptotos. Unde patet, quocumque tandem angulo a & e jungi intelligantur, vel per duarum parabolarum interſectionem, vel per Hyperbolam, & quamlibet ex dictis parabolis, Problema ſolvi poſſe. Quas quidem conſtructiones cum ſatis obviæ ſint ſufficit indicaſſe.

Ex his ſimplicibus æquationibus, compoſitæ deduci poſſunt hoc modo. Componendo nempe primam cum ſecundâ affirmativè fit, $be + ee \parallel da + aa$, quæ eſt ad hyperbolā. Negativè vero, $be - ee \parallel aa - da$, quæ eſt ad Ellipſim vel circulum; ad illam quidem, ſi angulus quem rectæ a, & e, continent, ſupponatur obliquus; ad hunc verò, ſi rectus: quod ſemper ſupponemus in ſequentibus, niſi aliud monuerimus.

Eodem modo affirmativè, & negativè, componendo tertiam æquationem cum prioribus, fiunt hæ,

$$be + ae \parallel aa + bd$$
$$be - ae \parallel aa - bd$$
$$ae + ee \parallel bd + da$$
$$ae - ee \parallel bd - da$$

quæ omnes ſunt ad diverſas hyperbolas, ut patet.

Ex his evidens eſt, poſito, ut diximus, angulo quem a & e continent recto, ope circuli plurimas conſtructiones problematis haberi, tot ſcilicet, quot circuli unius, duarum parabolarum, & ſex hyperbolarum combinationes fieri poſſunt. Sed ut infinitas inveniamus ſequenti methodo procedendum eſt.

Quoniam communis multiplicator, vel diviſor, rationem non mutat, ſi ſit æquatio, exempli gratiâ, inter ee, & da, erit etiam inter bee, & bda; & aſſumto quolibet diviſore q, æquabuntur quoque $\frac{bee}{q}$ & $\frac{bda}{q}$. Componamus nunc affirmativè vel negativè hanc æquationem, cum aliâ $be \parallel aa$; producentur duæ.

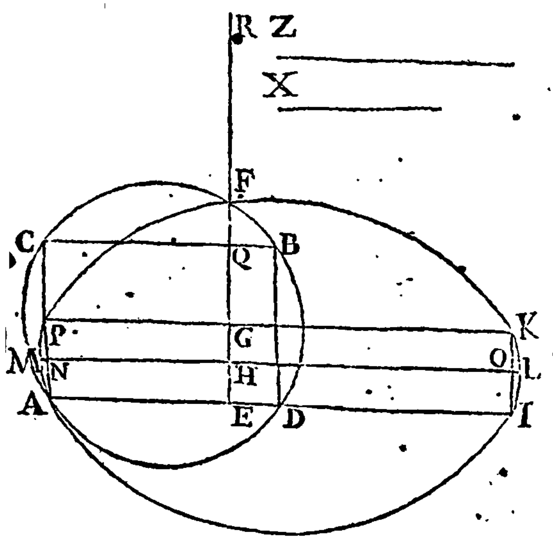
$$be - \frac{bee}{q} \parallel aa + \frac{bda}{q}. \quad \&$$

$$be + \frac{bee}{q} \parallel aa + \frac{bda}{q}.$$

Quarum prima eſt ad infinitas Ellipſes, ſecunda verò ad infinitas hyperbolas, pro variâ ratione q, ad b, cùm q, ad libitum aſſumi poſſit. Et hac Analyſi nituntur Propoſitiones prima & ſecunda Meſolabi noſtri, in quibus, cum circulo ſupra invento, has Ellipſes, vel Hyperbolas, ad ſolutionem Problematis applicuimus.

Nam, in figurâ propoſitionis primæ, AD, & AC, ſunt b, & d, extremæ datæ; ex quibus ad angulum rectum junctis, perficitur rectangulum ACBD, & circa illud circulus. Nunc ſi ſumatur in eo punctum F, & demittatur ad AB, normalis FE, ſecans CB; in Q, patet, (ſi AE dicatur e) EF, fore a; atque ita ſatisfieri æquationi ad circulum ſupra inventæ, ſcilicet $be - ee \parallel aa - da$; quandoquidem rectangulum DEA, ſive $be - ee$ in terminis analyticis, ex proprietate circuli, ſemper æquale ſit rectangulo EFQ, ſive $aa - da$, ubicumque ſumatur punctum F.

Similiter circa angulum ad A, rectum, facto quolibet alio rectangulo



gulo APKI, priori æquali, ſive, in quo ſit eadem ratio IA, ad AD, quæ eſt CA, ad AP; & deſcriptâ circa illud Ellipſi, cujus axes ſint rectanguli APKI lateribus paralleli, & in qua axis, qui parallelus eſt rectæ AI, ad latus tranſverſum, eandem habet rationem, quam habet CA, ad PA, vel IA, ad AD, hoc eſt (ſi in terminis Analyticis IA aſſumta ad libitum, dicatur q,) quam habet q, ad b; oſtendetur facilè, ſatisfieri quoque hac conſtructione alteri æquationi ad infinitas Ellipſes, ſive $be - \frac{bee}{q} \parallel aa - \frac{bda}{q}$. Sumto enim, ut prius, in Ellipſi quolibet puncto E, demittatur ad AP, normalis FE, ſecans PK, in G: rectangulum IEA, ad rectangulum EFG, ex proprietate Ellipſis, erit in ratione axis paralleli rectæ AI, ad latus tranſverſum, hoc eſt in ratione IA, ad AD (ex hypotheſi) vel q ad b. Cùm vero ſit ut IA, ad AD, vel q, ad b, ita CA, ſive d, ad AP; erit AP, vel EG ipſi æqualis, $\frac{bd}{q}$ in terminis analyticis. Igitur ut rectangulum IEA, ſive $qe - ee$, ad rectangulum EFG, ſive $aa - \frac{bda}{q}$, ita q, ad b; & æquatio, $qaa - bda \parallel bqe - bee$, ſive applicatis omnibus ad q, $aa - \frac{bda}{q} \parallel be - \frac{bee}{q}$.

Patet igitur utriuſque æquationis effectio, quâ invenitur punctum F, ſectione nempe circuli, & Ellipſis, determinans ſolutionem Pro-

blematis

blematis, cum rectæ AE, EF, ſint tam circulo quam Ellipſi communes. Demonſtratio ſeſe offert, jungendo ſimul utramque æquationem, vel unam ab aliâ auferẽdo. Nam ſi $be-ee$, auferatur à $be-\frac{bee}{q}$, remanebit $\frac{-bee}{q}+ee$. Et ſi $aa-da$, auferatur ab $aa-\frac{bda}{q}$, remanebit $-\frac{bda}{q}+da$. Æqualitas igitur erit inter $-\frac{bee}{q}+ee$, & $-\frac{bda}{q}+da$: ſive, ductis omnibus in q, & applicatis ad $q-b$, inter ee, & da. Tres igitur a, e, d, proportionales erunt. Similiter ſi $be-ee$, addatur $be-\frac{bee}{q}$; fiet, $2be-ee-\frac{bee}{q}$. & ſi $aa-da$, addatur $aa-\frac{bda}{q}$, fiet $2aa-da-\frac{bda}{q}$, ſive ductis omnibus in q, & applicatis ad $b+q$ $\frac{2qaa}{b+q}-da \parallel \frac{2bqe}{b+q}-ee$. Sed oſtenſum eſt da, æquari ee; Igitur $\frac{2qaa}{b+q}$, æquabitur $\frac{2bqe}{b+q}$, ſive aa, æquabitur be. Tres igitur b, a, e, erunt pariter proportionales.

Eadem omninò methodus eſt conſtructionis & demonſtrationis, in æquatione ad infinitas hyperbolas, quam exhibuimus Propoſitione ſecundâ, ideoque non videtur operæ pretium huic ulterius immorari. Tantum obſervandum eſt, quod, quemadmodum ſumſimus $\frac{bee}{q} \parallel \frac{bda}{q}$, ita aſſumi potuiſſet $\frac{bbe}{q} \parallel \frac{baa}{q}$, res enim in idem recidit, ut patebit conſideranti.

Conſtructiones ejuſdem Problematis, quæ in Meſolabo ſequuntur, poſſunt pari artificio, diviſoribus ſcilicet ac multiplicatoribus ad libitum aſſumtis, ad infinitas hyperbolas vel Ellipſes produci, quod fortaſſe, non erit inutile, ſaltem in caſibus aliquot difficilioribus oſtendere.

Tertia æquatio ſimplex erat, $ae \parallel bd$. Ex qua hanc elicimus, $\frac{2bae}{q} \parallel \frac{2bbd}{q}$. & addẽdo illam alteri $be \parallel aa$, componimus novam, $be+\frac{2bae}{q} \parallel aa+\frac{2bbd}{q}$, ad infinitas hyperbolas, quas ſic inveniemus.

Addatur

Addatur utrique parti æquationis $\frac{bbee}{qq}$. Igitur erit

$$\frac{bbee}{qq} + be + \frac{bae}{q} \parallel \frac{bbee}{qq} + aa + \frac{bbd}{q}$$

ſive factâ metatheſi,

$$\frac{bbee}{qq} + be - \frac{2bbd}{q} \parallel \frac{bbee}{qq} + \frac{2bae}{q}$$

Ex quâ æquatione oritur hîc analogiſmus conſtructionem indicans: ut qq, ad bb, ita $\frac{qqe}{b} - 2qd + ee$, ad $aa - \frac{2bae}{q} + \frac{bbee}{qq}$, ſive ad quadratũ $a - \frac{be}{q}$.

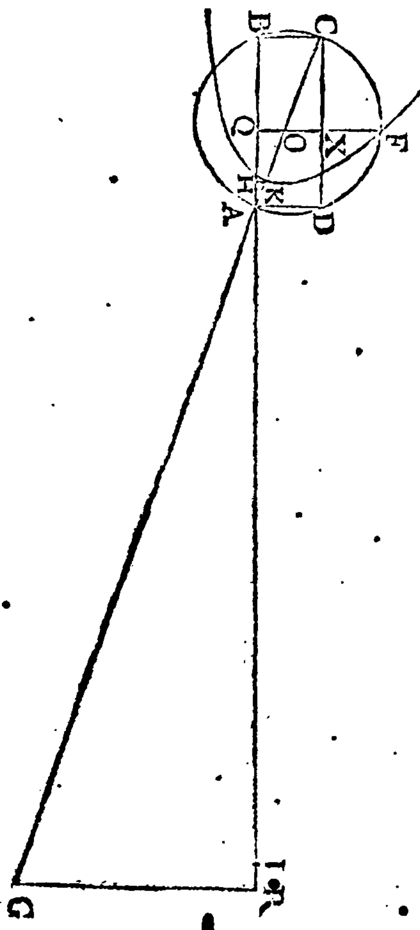
Itaque ſumtâ quâlibet RH, æquali $\frac{qq}{b}$ ſecetur illa in A, itaut rectangulum RAH, ſit æquale qd. Et facta RI, æquali AH, erectâque in H, normali KH, quæ ſit ad HA, ut b, ad q, jungatur KA, & producatur, uſque dum normali erectæ in R, occurrat in puncto G. Demùm, latere tranverſo GK, recto verò ad quod GK ſe habeat, ut $qq + bb$, ad bb, ac vertice K, deſcribatur Hyperbola, cujus applicatæ parallelæ ſint ipſi KH. Dico illam ſatisfacere propoſito, ſive ſumto in illa quolibet puncto F, & demiſsâ normali FQ, ſecante GK productam in O puncto, AQ eſſe e, & QF a quæſitas.

Ratio enim quadrati OF, ad rectangulum GOK, eadem eſt quæ bb, ad $qq + bb$, ex conſtructione: Ratio verò ejuſdem rectanguli GOK, ad rectangulum RQH, eadem eſt quæ quadrati AK, ad quadratum AH, cum componatur ex ratione GO, ad RQ, ſive AK, ad AH (ob parallelas,) & ex ratione OK, ad HQ, ſive rurſus AK, ad AH (ob eaſdem). Sed ratio quadrati AK, ad quadratum AH, eſt ratio $qq + bb$ ad qq, cum AH, ſit ad HK, ut q, ad b, ex conſtructione. Igitur ratio quadrati OF, ad rectangulum RQH, eadem erit quæ bb, ad qq. Itaque ſit AQ, ſit e, & QF, a, erit FO, $a - \frac{be}{q}$, & ejus quadratum, $aa + \frac{bbee}{qq} - \frac{2bae}{q}$. Rectangulum verò RQH, quod æquale eſt rectangulo IQA, minus rectangulo RAH, erit $\frac{qqe}{b} + ee$

$- 2qd$.

$-2qd$, habebimus igitur analogiſmum,

$$qq / bb / \frac{qqe}{b} + ee - 2qd / aa + \frac{bbee}{qq} - \frac{2bae}{q}.$$



& æquationem $\frac{bbee}{qq} + be - \frac{2bbd}{q} \| aa + \frac{bbee}{qq} - \frac{2bae}{q}$. quæ conſtruenda proponebatur.

Cùm verò pro q, quælibet linea aſſumi poſſit, clarum evadit hyperbolas infinitas eandem æquationem reddere.

Accidere interim poteſt, talem q aſſumi, ut punctum A, incidat in medium rectæ RH, quo caſu non hyperbola, ſed recta linea per K, ducta, ſatisfaciet propoſito. Sed ad inventionem duarum mediarum inter extremas datas, ut hoc obiter moneam, nihil inde auxilii provenit, cum par ſit difficultas, hunc caſum arte invenire, ac Problema ſolvere. Nam ipſa q, tunc dupla eſt mediæ majoris quæſitæ, quod ſic breviter oſtendo. Quoniam rectangulum RAH, ſive $2qd$, ſi punctum A in medium rectæ RH incidat, æquale eſt quadrato dimidiæ RH, ſive $\frac{1}{2}\frac{qq}{b}$ erit æquatio, $2qd \| \frac{1}{4}\frac{q^4}{bb}$ ſive $2bbd \| \frac{1}{4}q^3$, hoc eſt $bbd \| \frac{1}{8}q^3$. Unde evidens eſt $\frac{1}{2}q$, eſſe mediam

diam majorem inter extremas datas b, & d.

At ſi talis ſit aſſumta q, ut recta RH, ſecari non poſſit ut præſcriptum eſt, nempe ſi $2qd$, majus ſit $\frac{\frac{1}{4}qq}{bb}$, tunc hyperbola invertitur, eodem planè modo, quem Propoſitione ſecunda Meſolabi oſtendimus, nec major in uno, quam altero caſu eſt difficultas. Patet interim ſi cum qualibet harum hyperbolarum, componatur quælibet alia ex ſupra inventis, vel hyperbolis vel parabolis, vel Ellipſibus, vel circulo; uti etiam ſi quælibet duæ ex his infinitis, modo præſcripto inter ſe conjungantur; ex illarum interſectione haberi ſolutionem Problematis: ſecabunt enim ſe in aliquo puncto ut F, ex quo demiſſâ normali FQ, duæ FQ, QA mediæ erunt inter datas.

Unicum exemplum damus in harum hyperbolarum & circuli interſectione. Erectâ AD normali ad AQ, & æquali d, ſumatur AB, æqualis b, & perficiatur rectangulum AD, circa quod deſcribatur circulus, occurrens hyperbolæ jam deſcriptæ in F, puncto, ex quo in AB, cadat normalis FQ. Dico duas FQ, QA, eſſe medias quæſitas, Nam, ex conſtructione hyperbolæ, habemus, in terminis Analyticis, hanc æquationem, $be - \frac{2bbd}{q} \parallel aa - \frac{2bae}{q}$. &, ex proprietate circuli, hanc, $be - ee \parallel aa - da$.

Ex priori, deducimus hunc analogiſmum,

$$b \,/\, a \,/\, a - \frac{2be}{q} \,/\, e - \frac{2bd}{q}$$

Vel, ſumto communi multiplicatore, ac diviſore,

$$\frac{2bb}{q} \,/\, \frac{2ba}{q} \,/\, a - \frac{2be}{q} \,/\, e - \frac{2bd}{q}$$

& permutando ac componendo,

$$\frac{2bb}{q} + a - \frac{2be}{q} \,\Big|\, a - \frac{2be}{q} \,\Big|\, \frac{2ba}{q} + e - \frac{2bd}{q} \,\Big|\, e - \frac{2bd}{q}.$$

& rurſus permutando,

$$\frac{2bb}{q} + a - \frac{2be}{q} \,\Big|\, \frac{2ba}{q} + e - \frac{2bd}{q} \,\Big|\, a - \frac{2be}{q} \,/\, e - \frac{2bd}{q}$$

hoc eſt b ad a ex primo analogiſmo ſupra poſito.

Ex poſteriori vero æquatione, hunc analogiſmum habemus,

$$b - e \,/\, a - d \,/\, a \,/\, e$$

ſive, ſumto communi multiplicatore, ac diviſore,

$$\frac{2bb}{q} - \frac{2be}{q} \,/\, \frac{2ba}{q} - \frac{2bd}{q} \,/\, a \,/\, e$$

& permutando, ac componendo,

$$\frac{2bb}{q} - \frac{2be}{q} + a \,/\, a \,/\, \frac{2ba}{q} - \frac{2bd}{q} + e \,/\, e$$

& rurſus permutando,

$$\frac{2bb}{q} - \frac{2be}{q} + a \,/\, \frac{2ba}{q} - \frac{2bd}{q} + e \,/\, a \,/\, e$$

ſed ut $\frac{2bb}{q} - \frac{2be}{q} + a$, ad $\frac{2ba}{q} - \frac{2bd}{q} + e$, ita oſtenſum eſt, ex priori analogiſmo, eſſe b, ad a; igitur ut b, ad a, ita a, ad e; & $be \parallel aa$.

Itaque in una ſuperiorum æquationum, ut in poſteriori, $be - ee \parallel aa - da$, pro be, poſito ejus valore aa, remanebit $-ee \parallel da$, ſive $da \parallel ee$ & tres a, e, d, erunt in continuâ analogiâ, in quâ etiam oſtenſæ ſunt tres b, a, e; quatuor igitur b, a, e, d, erunt continuè proportionales.

Et hæc quidem univerſalis eſt conſtructio ac demonſtratio Problematis per circulum & infinitas hyperbolas, quarum unam propoſitione tertiâ Meſolabi conſtruximus, & demonſtravimus, ut conferenti patebit: oſtendamus modò methodum, quâ eadem æquatio aliter deduci poſſit ad infinitas hyperbolas. Habuimus $be + ae \parallel aa + bd$, & $be \parallel aa$. Igitur ſumto, ut ante, multiplicatore ac diviſore communi, $\frac{bbe}{q}$, æquabitur $\frac{baa}{q}$, & cum ae, æquetur bd, addendo ſimul utramque æquationem fiet, $\frac{bbe}{q} + ae \parallel \frac{baa}{q} + bd$.

Quæ æquatio rurſus eſt ad infinitas hyperbolas conſtruendas ...equitur. Facta metatheſi, erit

$$\frac{bbe}{q} + ae - \frac{baa}{q} \parallel bd.$$

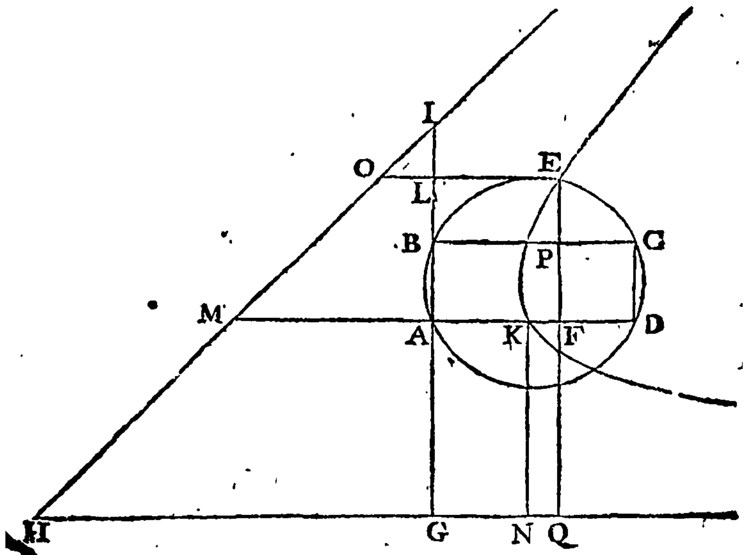
& addito utrimque $\frac{b5}{q3}$,

$$\frac{b5}{q3} + \frac{bbe}{q} + ae - \frac{baa}{q} \parallel bd + \frac{b5}{q3},$$

hoc eſt, rectangulum ex $\frac{b3}{qq} - \frac{ba}{q} + e$, in $\frac{bb}{q} + a$, æquabitur rectan-

rectangulo ex $\frac{bb}{q}$, in $\frac{b^3}{qq} + \frac{qd}{b}$.

Sit quælibet GH, || $\frac{2b^3}{qq}$, cui ad rectos ponatur GI, æqualis $\frac{2bb}{q}$, ſecta bifariam in A puncto, ex quo ducatur AM, parallela GH ejuſque dimidia, productâque MA, in K, donec AK, ſit æqualis $\frac{qd}{b}$, jungatur HMI, & circa aſymptotos HI, HG, deſcribatur per pun-



ctum K, hyperbola KE. Dico illam ſatisfacere propoſito, ſive ſumto in ea quolibet puncto, ut E, ſi ab eo demittantur normales EF, EL, in rectas KA, AI, illas fore *a*, & *e*, quæſitas. Producatur EL, uſque ad HI, in O. Erit itaque IL, $\frac{bb}{q} - a$, cum LA, ſit æqualis EF: & cum ſit ut IA, ad AM, ſive $\frac{bb}{q}$, ad $\frac{b^3}{qq}$, ex conſtructione, hoc eſt *q*, ad *b*, ita IL, ſive $\frac{bb}{q} - a$, ad LO; erit LO, $\frac{b^3}{qq} - \frac{ab}{q}$. Producatur

EF, ad HG, in Q: erit EQ, $a + \frac{bb}{q}$. Cadat etiam in HG, norma-lis KN, erit illa pariter $\frac{bb}{q}$, & KM, $\frac{qd}{b} + \frac{b^3}{qq}$. Cum verò duo puncta H, & E, ſint in eadem hyperbolâ, ex hypotheſi, & ex illis cadant in aſymptotos, KM, EO, & KN, EQ; rectangulum QEO, æquale erit rectangulo NKM, hoc eſt, rectangulum ex $\frac{b^3}{qq} - \frac{ba}{q} + e$, in $\frac{bb}{q} + a$, æquabitur rectangulo ex $\frac{bb}{q}$, in $\frac{b^3}{qq} + \frac{qd}{b}$. Unde redit æquatio prior,

$$\frac{b^5}{q^3} + \frac{bbe}{q} + ae - \frac{baa}{q} \parallel \frac{b^5}{q^3} + bd,$$ ſine ablatis æqualibus,

$$\frac{bbe}{q} + ae \parallel \frac{baa}{q} + bd.$$

Ex quibus, ut prius, evidens eſt numerus infinitus ſolutionum Problematis; aptando ſcilicet has hyperbolas, vel inter ſe, vel cum quâlibet ex ſectionibus ante deſcriptis. Unicum rurſus exemplum damus, cum circulo. In AK, ſumatur AD, æqualis b, & in AI, ſimiliter AB, æqualis d; & perfecto, ut alias ſemper, rectangulo ADCB, circa illud deſcriptus intelligatur circulus, occurrens hyperbolæ in E puncto, ex quo cadat in AD, normalis EF. Dico rectas EF, FA, eſſe medias proportionales, inter b, & d, datas. Nam, ex proprietate hyperbolæ, habemus hanc æquationem, $\frac{bbe}{q} + ae \parallel \frac{baa}{q} + bd$, ſive $\frac{bbe}{q} - bd \parallel \frac{baa}{q} - ae$. Quæ reſoluta in analogiſmum dat, $b /$

$$\frac{ba}{q} - e / \frac{be}{q} - d$$

& permutando, ac componendo,

$$b + \frac{ba}{q} - e / \frac{ba}{q} - e / a + \frac{be}{q} - d / \frac{be}{q} - d.$$

& per converſionem rationis,

$$b + \frac{ba}{q} - e / b / a + \frac{be}{q} - d / a.$$

ſive rurſus permutando,

$$b + \frac{ba}{q} - e / a + \frac{be}{q} - d / b / a.$$

Sed, ex equatione ad circulum, $be - ee \parallel aa - da$, habemus hunc analogiſmum,

$$b - e / a - d / a / e$$

ſive

$$b - e / a - d / \frac{ba}{q} / \frac{be}{q}$$

Igitur permutando & componendo, erit

$$b - e + \frac{ba}{q} / \frac{ba}{q} / a - d + \frac{be}{q} / \frac{be}{q}$$

& permutando rurſus,

$$b - e + \frac{ba}{q} / a - d + \frac{be}{q} / \frac{ba}{q} / \frac{be}{q}, \text{ ſive } a / e.$$

Sed & $b - e + \frac{ba}{q}$; ad $a - d + \frac{be}{q}$, ita ſupra oſtenſum eſt eſſe b, ad a. Igitur ut b, ad a, ita a, ad e, & $be \parallel aa$; itaque, in ſuperiori æquatione, poſito rurſus pro be, ejus valore aa, remanebit $da \parallel ee$, & tres a, e, d, pariter proportionales erunt. Igitur & quatuor b, a, e, d.

Hæc etiam univerſalis eſt conſtructio, cujus particularem dedimus Meſolabi Propoſitione ſextâ, in quâ operæ pretium eſt animadvertere, eandem illic Hyperbolam deſcribi, quæ Propoſitione tertia: quod conſultò factum eſt, ut ejuſdem æquationis ad Hyperbolam, binas conſtructiones, & duplicem modum eandem ad infinitas alias deducendi, in hoc opere exponendi daretur occaſio.

Non immorabor in explicandâ & producendâ in infinitum aliarum propoſitionum Analyſi, cum id præſtare proclivè futurum ſit ei qui ſuperiorem methodum perceperit. Quoniam verò tres æquationes ſimplices in principio repertæ ſunt, & ex duarum tantum compoſitione oriuntur æquationes, quas hactenus conſtruximus; aliquo etiam exemplo oſtendendum eſt, ex tribus ſimul junctis Problema conſtrui poſſe.

Simplices æquationes erant, $be \parallel aa$, $ee \parallel da$, $ae \parallel bd$, quæ pluribus modis ſimul jungi poſſunt, addendo ſcilicet, vel ab invicem auferendo: ſed modo ſequenti, $be - ee + bd \parallel aa - da + ae$, dant æquationem ad Ellipſim. Addatur enim utrique parti æquationis $\frac{1}{4}dd - de + \frac{1}{4}ee$, fiet

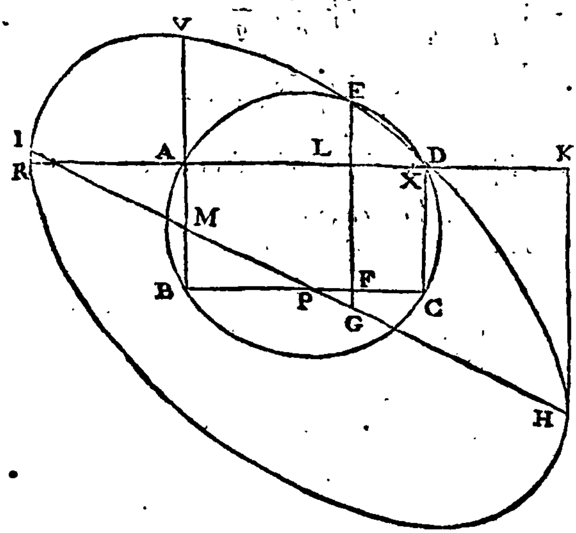
$$be - ee + bd + \tfrac{1}{4}dd - de + \tfrac{1}{4}ee \parallel aa - da + ae + \tfrac{1}{4}dd - de + \tfrac{1}{4}ee$$

 ſive,

ſive, $be + bd + \frac{1}{4}dd - de - \frac{3}{4}ee \parallel aa - da + ae + \frac{1}{4}dd - de + \frac{1}{4}ee$.
hoc eſt, $be + bd + \frac{1}{4}dd - de - \frac{3}{4}ee$, æquabitur quadrato $a - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$;
vel reductâ æquatione in analogiſmum,

$4 / 3 / \frac{4}{3}be - \frac{4}{3}de - ee + \frac{4}{3}bd + \frac{1}{3}dd / aa - da + ae + \frac{1}{4}dd - de + \frac{1}{4}ee$

Sit nunc AD, æqualis b, eique ad rectos AB, æqualis d, perficiatur parallelogrammum ABCD, & in AD productâ, ſi opus, ſumatur AX, æqualis $\frac{4}{3}b - \frac{2}{3}d$. Tum DA, producatur in R, ita ut rectangulum XRA, ſit æquale $\frac{4}{3}bd + \frac{1}{3}dd$, & ipſi AR, ſumatur æqualis XK; biſectâque AB, in M, ſumatur in BC, recta BP, æqualis BA, & juncta MP, producatur utrimque, donec occurrat normalibus in R, & K, erectis in punctis I, & H. Deindè producatur etiam MA, in V, ita ut quadratum MV, ſit ſubſeſquitertium rectanguli RAK: ac demum diametro IK, deſcribatur Ellipſis, cujus una applicatarum ſit VM. Dico illam præſtare, quod propoſitum eſt, ſive, ſumto in illa quolibet puncto, ut E, ſi applicetur ad diametrum recta EG, ſecans parallelas AD, BC, in L, & F, rectam LE eſſe a quæſitam, FB verò vel LA, eſſe e.



Nam quadratum VM, ad rectangulum IMH, eſt ut quadratum EG, ad rectangulum IGH, (ob ellipſim.) rectangulum verò IMH, ad rectangulum RAK, eſt ut rectangulum IGH, ad rectangulum RLK, (ob parallelas IR, AM, LG, KH:) Igitur, ut quadratum VM, ad rectangulum RAK, ita quadratum EG, ad rectangulum RLK, hoc eſt, ut 3, ad 4, ex conſtructione, cum eadem poſita ſit

ſit ratio quadrati VM. ad rectangulum RAK.

Nunc, ſi EF dicatur a, & FB e, quoniam BP eſt æqualis d, erit PF, $e - d$, & FG ejus dimidia, $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}d$. Itaque tota EG, erit $a + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}d$, cujus quadratum eſt,

$$aa + \tfrac{1}{4}ee + \tfrac{1}{4}dd - da - \tfrac{1}{2}de + ae.$$

Rectangulum verò RLK, cum ſit æquale duobus rectangulis RAK, ſive $\frac{4}{3}bd + \frac{1}{3}dd$, & ALX, ſive $\frac{4}{3}be - \frac{2}{3}de - ee$, erit analogiſmus.

$$3 / 4 / aa + \tfrac{1}{4}ee + \tfrac{1}{4}dd - da - \tfrac{1}{2}de + ae / \tfrac{4}{3}bd + \tfrac{1}{3}dd + \tfrac{4}{3}be - \tfrac{2}{3}de - ee$$

Ex quo deducitur æquatio,

$$4aa + ee + dd - 4da - 2de + 4ae \parallel 4bd + dd + 4be - 2be - 3ee,$$

ſive ablatis æqualibus, & demto utrimque ee,

$$4aa - 4da + 4ae \parallel 4bd + 4be - 4ee.$$

hoc eſt, $aa - da + ae \parallel bd + be - ee$. Quæ æquatio prius conſtruenda proponebatur.

Et hæc ipſa eſt etiam quâ uſi ſumus Meſolabi Propoſitione quintâ, ſed in caſu tantùm particulari; quo ſcilicet extremæ dantur in ratione duplâ. Modus autem eam deducendi ad infinitas Ellipſes, idem eſt, qui ſupra ſæpè deſcriptus eſt, exempli gratiâ, pro bd, & ae, ſumendo $\frac{bbd}{q}$, & $\frac{bae}{q}$, & faciendi novam æquationem,

$$aa - da + \frac{bae}{q} \parallel \frac{bbd}{q} + be - ee.$$

quæ erit ad infinitas Ellipſes inveniendas ut prius: addendo nimirum utrique parti æquationis $\frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}\frac{bde}{q} + \frac{1}{4}\frac{bbee}{qq}$, ut fiat

$$\frac{bbd}{q} + be - ee + \tfrac{1}{4}dd - \tfrac{1}{2}\frac{bde}{q} + \tfrac{1}{4}\frac{bbee}{qq} \parallel aa - da + \frac{bae}{q} + \tfrac{1}{4}dd - \tfrac{1}{2}\frac{bde}{q} + \tfrac{1}{4}\frac{bbee}{qq}$$

Eſt autem $aa - da + \frac{bae}{q} + \frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}\frac{bde}{q} + \frac{1}{4}\frac{bbee}{qq}$, quadratum cujus latus, $a - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}\frac{be}{q}$: Itaque reductâ, ut ante, æquatione ad analogiſmum, erit

$$qq / qq - \tfrac{1}{2}bb / \frac{qqbe + qbbd + \frac{1}{4}ddqq - \frac{1}{2}qbde}{qq - \frac{1}{2}bb} - ee / \text{quadratum}$$

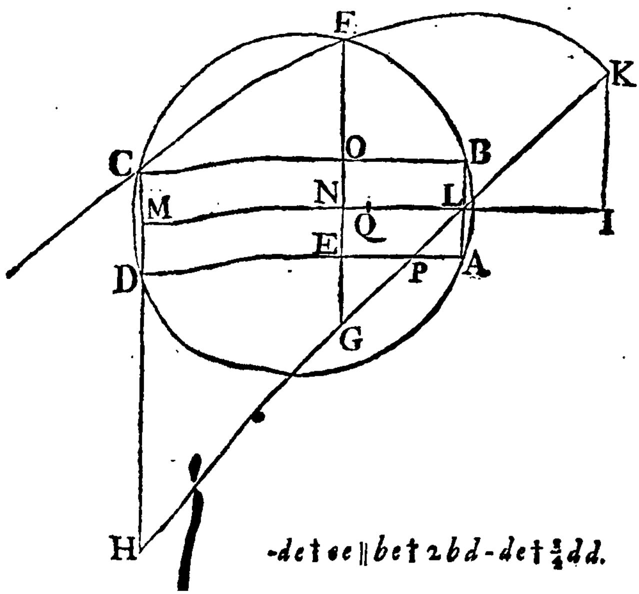
$$a - \tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}\frac{be}{q}$$

Ex

Ex quo facilè deſcribetur Ellipſis, ſumendo nempe, in figura ſuperiori, pro AX, $\frac{qqb - \frac{1}{2}qbd}{qq - \frac{1}{4}bb}$, pro rectangulo XRA, $\frac{bbqd + \frac{1}{4}ddqb}{qq - \frac{1}{4}bb}$ faciendoque ut $qq - \frac{1}{4}bb$, ad qq, ita quadratum MV, ad rectangulum RAK, & ut $\frac{1}{2}b$, ad q, ita MB, ad BP. Cujus demonſtratio nullo negotio ſeſe offeret, præcedentis veſtigia repetenti.

Problema autem per has Ellipſes, & quamcumque aliam ſectionem ante deſcriptam ſolvi evidens eſt, ut ſi circa rectangulum ADCB, deſcriberetur circulus; ſecaret enim Ellipſim in puncto E, ex quo demiſſa in BC, normalis EF, daret quatuor proportionales AD, EF, FB, BA. Quod facilè oſtenditur eodem modo, quo ſupra ſæpius uſi ſumus. Obſervandum eſt interim, in hac æquatione neceſſariam eſſe ipſius q ad libitum aſſumtæ, determinationem. Oportet enim eam eſſe majorem dimidia b. Quod patet, cùm in analogiſmo inveniatur ratio qq, ad $qq - \frac{1}{4}bb$. Si enim q, æquaretur $\frac{1}{2}b$, æquatio non amplius eſſet ad Ellipſim, ſed ad Parabolam: quod ſic oſtendo.

In æquatione $aa - da + \frac{bae}{q} \parallel be - ee + \frac{bbd}{q}$, poſitâ ratione b ad q duplâ, $\frac{bae}{q}$ erit $2ae$, & $\frac{bbd}{q}$, $2bd$. Erit igitur æquatio $aa - da + 2ae \parallel be - ee + 2bd$, ſive addito ee utrimque, ac rurſus $\frac{1}{4}dd - de$ fiet, $aa - da + 2ae + \frac{1}{4}dd - de + ee \parallel be + 2bd - de + \frac{1}{4}dd$. Quam



Quam æquationem ad Parabolam conſtruximus Meſolabi Propoſitione decimaquartâ, in illius enim figurâ, MQ, eſt $b - d$, CH, $b + \frac{1}{2} d$. Igitur cum factum ſit, ut QM, ad CH, ita CH, ad ad MI; erit MI, $\frac{bb + bd + \frac{1}{4}dd}{b - d}$, & LI, $\frac{bb + bd + \frac{1}{4}dd}{b - d} - b$, ſive $\frac{2bd + \frac{1}{4}dd}{b - d}$. AE verò, ſive LN, eſt e; itaque tota IN, erit $\frac{2bd + \frac{1}{4}dd}{b - d} + e$. At, ſumto in MI quolibet puncto N, & per illud applicatâ FG, rectangulum ſub MIN, ex conſtructione, æquale eſt quadrato FG; eſt autem FG, $a + e - \frac{1}{2}d$, cum FE; ſit a, & EG, æqualis EP, ſive $e - \frac{1}{2}d$. Erit igitur æquatio,

$$aa - da + 2ae + ee - de + \frac{1}{4}dd \parallel 2bd + \frac{1}{4}dd + be - de$$

ſive, ablatis æqualibus, $aa - da + 2ae \parallel 2bd + be - ee$. Eadem nimirum, quæ hic propoſita eſt.

Quod ſi q aſſumta, minor eſſet dimidiâ b, tunc æquatio indicaret infinitas hyperbolas: eſſet enim analogiſmus, qq ad $\frac{1}{4}bb - qq$ / $\frac{qqbe + qbbd + \frac{1}{4}ddqq - \frac{1}{2}qbde}{qq - \frac{1}{4}bb} - ee$ / ad quadratum $a - \frac{1}{2}d + \frac{\frac{1}{2}be}{q}$.

Ex quo conſtructio eo modo deduci poteſt, quem in exemplo hic allato ad Ellipſes applicuimus.

Nec difficilior eſt conſtructio aliarum æquationum ex tribus compoſitarum, ut $\frac{bbe}{q} - ee + ae \parallel \frac{baa}{q} - da + bd$; vel $be - \frac{bee}{q} + ae \parallel aa - \frac{bda}{q} + bd$: aut cæterarum, quæ oriri poſſunt ex varietate ſignorum + & -, ex quibus rurſus infinitæ Ellipſes vel Hyperbolæ emergerent.

Atque hæc quidem ſufficere viderentur, ſi ea tantùm quæ in Meſolabo oſtenſa ſunt, explicare propoſitum nobis eſſet; ſed indicanda eſt via, quâ Geometria ulterius etiam promoveri valeat.

Hactenus inter data b, & d, ſemper ſuppoſuimus duas medias quæſitas, a, & e. Itaque conſtructiones omnes, quæ ex æquationibus ante explicatis, oriuntur, ambas pariter exhibent. Quod ſi unicam

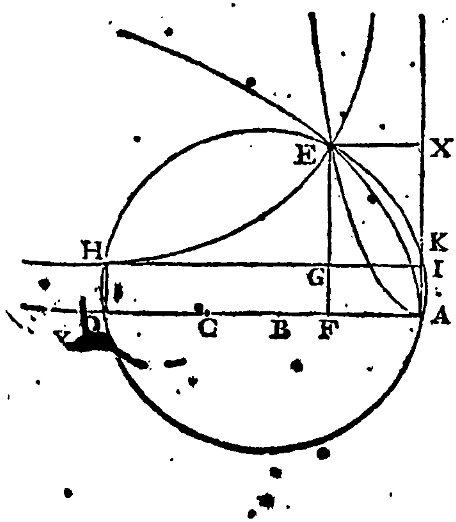
 tantùm

tantum habere vellemus, quâ inventâ, reliqua facili operatione eruitur, liceret infinitas Problematis ſolutiones invenire, diverſas ab iis, quæ hucuſque demonſtratæ ſunt. Exempli gratiâ, pro a, ponamus aliam quamlibet y, quæ ad a, habeat quamlibet rationem datam, ut q, ad b, Erit igitur $a \parallel \frac{by}{q}$. Quatuor itaque b, $\frac{by}{q}$, e, d, erunt in continuâ analogiâ.

Hinc deducuntur, ut prius, æquationes hæ ſimplices,

$$be \parallel \frac{bbyy}{qq}. \quad \frac{dby}{q} \parallel ee. \quad \frac{bey}{q} \parallel bd. \text{ ſive } ey \parallel qd.$$

Primam & ſecundam, evidens eſt eſſe ad Parabolam, tertiam verò ad Hyperbolam, neque id ulteriori explicatione indiget, ſed per earundem compoſitionem, modum indicabimus, quo infiniti circuli reperiri poterunt, ad quorum ſingulos, ſectiones illas, vel infinitas etiam Hyperbolas, aut Ellipſes, aptare licebit, quæ Problemati ſatisfaciant. Cum itaque be, ſit idem ac $\frac{bbyy}{qq}$, erit (ductâ utrâque parte in qq, & applicatâ ad bb) $\frac{qqe}{b} \parallel yy$; & auferendo ab hac æquatione ſecundam ex ſimplicibus, fiet $\frac{qqe}{b} - ee \parallel yy - \frac{dby}{q}$ æquatio ad infinitos circulos pro variâ ratione, q, ad b, cum quibus circulis, & unâ Parabolarum, vel Hyperbolâ ſupra inuentâ, Problema ſolvitur. Nempè ponatur AB $\parallel b$, producta utcumque in C, (vel ex qua reſecetur quælibet AC, idem enim eſt.). AC dicatur q; tum fiat ut AB, ad AC, ita AC, ad AD, erit AD, $\frac{qq}{b}$. Erigatur AK normalis æqualis d, quæ ſecetur in I, itaut ſit KA, ad AI, in ratione CA, ad BA; erit AI $\parallel \frac{db}{q}$. Tum perficiatur rectangulum IADH, ac circa illud deſcribatur circulus. Demum, vertice A, axe AK, latere recto AI, fiat parabola occurrens circulo in E puncto, ex quo cadat in AD normalis EF. Dico AF eſſe e, ſive minorem mediarum inter extremas BA, AK, & EF habere ad majorem, eandem rationem, quam habet CA, ad BA, ſive eſſe y. Cadat ex E, in AK productam, normalis EX, erit illa æqualis AF, ſive e, & AX æqualis FE ſive y. Igitur, ob



ob Parabolam, rectangulum IAX, æquabitur quadrato EX, ſive $\frac{bdy}{q} \parallel ee$, eruntque tres proportionales $\frac{by}{q}$, e, d.

Sed cum rectangulum DFA, ſit æquale rectangulo FEG, ob circulum, erit rurſus æquatio, $\frac{qqe}{b} - ee \parallel yy - \frac{bdy}{q}$ hoc eſt, additis æqualibus, ee, & $\frac{bdy}{q}$, erit $\frac{qqe}{b} \parallel yy$, ſive, $e \parallel \frac{byy}{qq}$, vel $be \parallel \frac{bbyy}{qq}$. Itaque tres b, $\frac{by}{q}$, e erunt etiam proportionales: cumque tres $\frac{by}{q}$, e, d, pariter ſupra oſtenſæ ſint proportionales, evidens eſt quatuor b, $\frac{by}{q}$, e, d, eſſe in continua analogiâ; & per conſequens, AF eſſe minorem mediarum inter AB, & AK, & ut AC, ad AB, ſive q, ad b, ita EF, ad majorem. Quod erat &c.

Idem omninò præſtabitur, ſi eodem vertice A, axe AB, latere recto AD deſcribatur parabola: ſecabit enim circulum in eodem E puncto, ut patet ex aliâ æquatione ad parabolam $\frac{qqe}{b} \parallel yy$.

Vel ſi circa Aſymptotos CA, AK, deſcribatur Hyperbola tranſiens per punctum H, occurret enim pariter circulo in eodem puncto E. Nam, ob hyperbolam, rectangulum AFE, ſive ye, æquabitur rectangulo ADH, ſive ex AD $\parallel \frac{qq}{b}$ in DH $\parallel \frac{db}{q}$, hoc eſt rectangulo qd; Igitur $\frac{ey}{q}$, æquabitur d, ſive $\frac{bey}{q} \parallel bd$. Erit igitur, ut b, ad $\frac{by}{q}$, ita e, ad d.

Sed quoniam $\frac{bye}{q} \| bd$, fiet etiam $\frac{b^3ye}{q^3} \| \frac{b^3d}{qq}$. Et auferendo hanc æquationem ab æquali utrimque poſito $\frac{bby}{q}$, erit

$$\frac{bby}{q} - \frac{b^3ye}{q^3} \| \frac{bby}{q} - \frac{b^3d}{qq}.$$ & analogiſmus,

$$b / \frac{by}{q} \;|\; b - \frac{bbe}{q} \;|\; \frac{by}{q} - \frac{bbd}{qq}.$$

Æquatio autem ad circulum erat, $\frac{qqe}{b} - ee \| yy - \frac{bdy}{q}$, ſive $qqe - bee \| byy - \frac{bbdy}{q}$. Hoc eſt, ductis omnibus in b, & applicatis ad [illegible]

$$be - \frac{bbee}{qq} \| \frac{bbyy}{qq} - \frac{b^3dy}{q^3}.$$ Ex quâ oritur analogiſmus,

$$b - \frac{bbe}{qq} \;|\; \frac{by}{q} - \frac{bbd}{qq} \;|\; \frac{by}{q} \;|\; e.$$

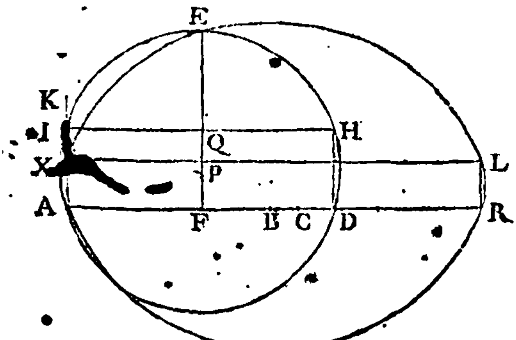
Ut autem $b - \frac{bbe}{q}$, ad $\frac{by}{q} - \frac{bbd}{qq}$, ita ſupra oſtenſum eſt, eſſe b, ad $\frac{by}{q}$; Igitur ut b, ad $\frac{by}{q}$, ita $\frac{by}{q}$, ad e, & e, ad d, ob Hyperbolam. Quod erat &c.

Et ulterius etiam componendo, deduci poſſunt aliæ æquationes, ut $\frac{qqe}{b} + ee \| yy + \frac{bdy}{q}$, aliæque plures.

Sed ſi quis uni ex his infinitis circulis, applicare velit infinitas ſectiones, id facilè præſtabit ex ſuperius traditâ methodo. Exempli gratiâ, quoniam $\frac{dby}{q} \| ee$; ſumendo quamlibet z, ad quam d, ſit in qualibet ratione datâ, fiat $\frac{rdby}{dq} \| \frac{ree}{d}$, ſive $\frac{rby}{q} \| \frac{ree}{d}$. Quam æquationem auferendo ab aliâ $\frac{qqe}{b} \| yy$, remanebit $\frac{qqe}{b} - \frac{ree}{d} \| yy - \frac{rby}{q}$, quæ eſt ad infinitas Ellipſes. Vel addendo; $\frac{qqe}{b} + \frac{ree}{d} \| yy + \frac{rby}{q}$, quæ eſt ad infinitas Hyperbolas. Conſtruendo itaque has æquationes, eaſque aptando uni ex infinitis circulis ſupra deſcriptis, ſolvetur Proble-

Problema. Exemplum damus in Ellipſibus.

Sint extremæ datæ AB major, AK minor, eidem ad angulos rectos; deſcribatur nunc unus ex circulis, hoc eſt productâ AB, utcumque in C, ſumatur in eâdem, AD, tertiâ proportionalis ipſarum AB, AC, (idem eſſet ſi punctum C, ſumeretur inter A, & B, ut ſupra monuimus:) tum ſecetur KA in I, ut ſit eadem ratio KA, ad IA, quæ CA, ad AB; ac, perfecto rectangulo DAIH, fiat circa illud circulus, Deindè ſumatur quælibet z, & fiat ut z, ad AD, ita KA, ad AR, & ut CA, ad AB, ita z, ad AX, ſumtam in AK: perfectoque rectangulo XARL, deſcribatur circa illud Ellipſis, cujus axes paralleli ſint rectis AR, AI, & in quâ ratio axis paralleli rectæ AR, ad latus rectum, ſit eadem quæ KA, ad z. Occurret hæc Ellipſis circulo in aliquo puncto, ut E, ex quo, demiſsâ in AR, normali EF, ſecante rectas IH, XL, in Q, & P; Dico FA eſſe minorem mediarum quæſitarum. Quod ſic oſtendo.



Sit in terminis Analyticis AB $\parallel b$, AK $\parallel d$, AC $\parallel q$, erit AD $\parallel \frac{qq}{b}$, AI $\frac{bd}{q}$; & quoniam factum eſt, ut z, ad DA, ſive $\frac{qq}{b}$, ita KA, ſive d, ad AR; erit AR $\parallel \frac{dqq}{bz}$: & rurſus, quoniam eſt ut CA, ad AB, ſive q, ad b, ita z, ad AX, erit AX, $\frac{zb}{q}$.

Nunc FA, ſit e, FE, y: ob circulum, rectangulum FEQ, æquale eſt rectangulo DFA, ſive in terminis Analyticis, $\frac{qqe}{b} - ee \parallel yy - \frac{bdy}{q}$. Ob Ellipſim, ut axis ad latus rectum, ſive ut d, ad z, ex conſtructione, ita rectangulum RFA, ad rectangulum FEP: eſt igitur analogiſmus

logiſmus

logiſmus, $d\,/\,z\,/\,\frac{dqqe}{bz}-ee\,/\,yy-\frac{eby}{q}$, & æquatio $\frac{dqqe}{bz}-ee \parallel \frac{dyy}{z}-\frac{dby}{q}$.

Et auferendo ab hac alteram ad circulum ſupra inventam

$$\frac{dqqe}{bz}-ee-\frac{qqe}{b}+ee \parallel \frac{dyy}{z}-\frac{dby}{q}-yy+\frac{dby}{q}$$

ſive, ablatis æqualibus, $\frac{dqqe}{bz}-\frac{qqe}{b} \parallel \frac{dyy}{z}-yy$.

hoc eſt ductis omnibus in z, & applicatis ad $z-d$, vel $d-z$, $\frac{qqe}{b}$ $\parallel yy$, ſive $e \parallel \frac{byy}{qq}$, vel $be \parallel \frac{bbyy}{qq}$. Tres igitur $b\,/\,\frac{by}{q}\,/\,e$, ſunt continuè proportionales.

Sed cum $\frac{qqe}{b}$ oſtenſum ſit æquari yy, & $\frac{qqe}{b}-ee \parallel yy-\frac{bdy}{q}$ ob circulum; ablatis æqualibus, erit $-ee \parallel -\frac{bdy}{q}$, ſive $ee \parallel \frac{bdy}{q}$. Itaque ut $\frac{by}{q}$, ad e, ita e, ad d. Quatuor igitur b, $\frac{by}{q}$, e, d, ſunt continuè proportionales, & per conſequens e, ſive FA, eſt minor mediarum inter extremas datas AB, AK, ſive b, & d. Quod erat &c.

Et hæc quidem repetendo veſtigia Analyſeos: cæterùm facilior eſt conſtructio, ſi ſumtâ qualibet AD, fiat ut AD, ad AB, ita quadratum AK, ad quadratum AI; tum ſumtâ iterum qualibet AR, perficiatur rectangulum ARLX, æquale rectangulo IADH; & circa hoc fiat circulus, circa illud verò Ellipſis, in qua ratio axis paralleli AR, ad latus rectum, eadem ſit quæ RA, ad AD, ſive IA, ad AX. Hanc enim conſtructionem cum priore coincidere, non difficulter deducitur ex Analyſi. Demonſtratio verò facillima eſt. Nam, ex Propoſitione prima Meſolabi, duæ EF, FA, mediæ ſunt inter extremas DA, & AI: Itaque cubus AF, æquatur ſolido ex quadrato AI, in AD. Sed idem ſolidum, æquale eſt ſolido ex quadrato AK, in AB, ex conſtructione, cum factum ſit ut AD, ad AB, ita quadratum AK, ad quadratum AI; Igitur cubus AF, æqualis eſt ſolido ex quadrato AK, in AB; & per conſequens, AF eſt minor mediarum inter ex-

tremas

tremas datas BA, AK. Quod erat &c.

Eâdem methodo, cum quolibet ex infinitis circulus componuntur infinitæ hyperbolæ, ex æquatione $\frac{qqe}{b} + \frac{zee}{d} \parallel yy + \frac{zby}{q}$. Ex quâ deductus analogiſmus $d \,/\, z \,/\, \frac{dqqe}{bz} + ee \,/\, yy + \frac{zby}{q}$ conſtructionem oſtendit ſuperiora conſideranti.

Superfluum arbitror monere id quod in a, ſeu majore mediarum fecimus, poſſe etiam in alia fieri, ſubſtituendo nimirum ejus loco $\frac{bv}{q}$: ſed ſi in utrâque a, & e, id fiat, tunc non ſolùm circuli infiniti invenientur, ad quorum ſingulos infinitæ Ellipſes, vel hyperbolæ applicatæ Problema ſolvant; verùm poterit etiam datâ qualibet ſectione conicâ, circulus reperiri, qui cum illa junctus medias quæſitas inter extremas datas exhibeat: quod ita univerſaliter per præcedentem Analyſim fieri nequit. Sumtâ enim qualibet p, ad libitum; pro a, & e, ponantur $\frac{by}{p}$, & $\frac{bv}{p}$, & fiat analogiſmus, $b \,/\, \frac{by}{p} \,/\, \frac{bv}{p} \,/\, d$: & ex illo æquationes tres ſimplices, & prius, $\frac{bbv}{p} \parallel \frac{bbyy}{pp}$ ſive $pv \parallel yy$.

$$\frac{dby}{p} \parallel \frac{bbvv}{pp} \text{ ſive } \frac{pdy}{b} \parallel vv$$

$$\& \; bd \parallel \frac{bbyv}{pp} \text{ ſive } \frac{ppd}{b} \parallel yv$$

quarum primæ rurſus ſunt ad Parabolas, tertia ad Hyperbolas circa Aſymptotos. Ex his ſimplicibus componitur

$$yy - \frac{pdy}{b} \parallel pv - vv \text{ ad infinitos circulos.}$$

Deindè pro $pv \parallel yy$ (ſumtâ rurſus qualibet q ad libitum) fiat $\frac{qpv}{b} \parallel \frac{qyy}{b}$: quo poſito loco $pv \parallel yy$, in priori æquatione habetur,

$$\frac{qpv}{b} - vv \parallel \frac{qyy}{q} - \frac{pdy}{b} \text{ ad infinitas Ellipſes.}$$

$$\text{vel } \frac{qpv}{b} + vv \parallel \frac{qyy}{b} + \frac{pdy}{b} \text{ ad infinitas Hyperbolas.}$$

quarum conſtructio ſatis obvia eſt, ex iis quæ ante demonſtrata ſunt.

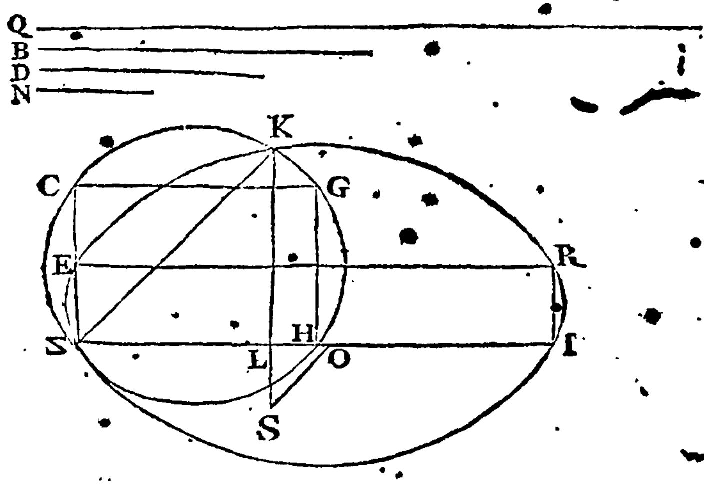
Itaque

Itaque modum duntaxat oſtendemus, quo, datâ qualibet Ellipſe, circulus reperiri poſſit, qui una cum illa Problema ſolvat.

Quoniam igitur æquatio eſt, $\frac{pqv}{b} - vv \parallel \frac{qyy}{b} - \frac{pdy}{b}$:

erit analogiſmus q, b / $\frac{pqv}{b} - vv$ / $yy - \frac{pdy}{q}$.

Detur nunc, cum quibuſlibet extremis b, & d, quælibet Ellipſis ZKRI. Cum in Analogiſmo, q ſumta ſit ad libitum, poterit talis



aſſumi, ut ad b datam, habeat eandem rationem, quam habet axis Ellipſis datæ, ad latus rectum ejuſdem. Igitur q ita determinatâ, inſcribatur Ellipſi rectangulum ZIRE, in quo ratio ZI, ad IR, ſit eadem, quæ $\frac{pq}{b}$, ad $\frac{pd}{q}$, (cum in analogiſmo habeatur $\frac{pqv}{b}$, & $\frac{pdy}{q}$,) ſive quæ eſt, qq, ad bd. Quoniam verò p, aſſumta eſt etiam ad libitum, poterit rectangulum ZIRE, intelligi æquale producto ex $\frac{pq}{b}$, in $\frac{pd}{q}$, ſive $\frac{ppd}{b}$. Igitur p, erit etiam determinata; erit enim ex hypotheſi, ut d, ad b, ita rectangulum ZIRE, ad pp. Determinata itaque

pariter

pariter erit æquatio ad infinitos circulos, $pv - vv \parallel yy - \frac{pdy}{b}$. Itaque, in rectâ ZI, ſumtâ ZH, æquali p; & normali HG, æquali $\frac{pd}{b}$, fiat rectangulum ZHGC, & circa illud circulus, occurrens Ellipſi in K puncto, ex quo in ZI demittatur normalis KL; erit illa y, & ZL v.

Nam, ex conſtructione, eſt ut qq, ad bd, ita ZI, ad IR; erit igitur ut qq, ad bd, ita quadratum ZI, ad rectangulum ZIRE, hoc eſt ad $\frac{ppd}{b}$; & permutando, ut qq, ad quadratum ZI, ita bd, ad $\frac{ppd}{b}$, ſive ita bb, ad pp: & rurſus permutando, ut qq, ad bb, ita quadratum ZI, ad pp; hoc eſt ut q, ad b, ita ZI, ad p: erit itaque ZI $\parallel \frac{pq}{b}$: & per conſequens, IR erit $\frac{pd}{q}$, cum factum ſit ut $\frac{qp}{b}$, ad $\frac{pd}{q}$, ita ZI, ad IR. Igitur ex proprietate circuli, erit æquatio,

$$pv - vv \parallel yy - \frac{pdy}{b}$$

ex proprietate verò Ellipſis, erit analogiſmus,

$$q / b / \frac{pqv}{b} - vv / yy - \frac{pdy}{q}.$$

Reliqua patent repetendo veſtigia Analyſeos; faciliorem verò demonſtrationem dedimus in Meſolabi Propoſitione ultimâ, ubi ex his ſatis, Problema ſolvimus: nec difficile eſt hæc ad caſum, quo Hyperbola daretur, applicare. Adnoto tantùm, per hanc etiam Analyſim Problemati ſatisfieri dato quolibet circulo; ad illum enim applicari poterunt Hyperbolæ, vel Ellipſes infinitæ, quæ illud ſolvunt. Ut ſi exempli gratiâ daretur circulus ZKH; in eo enim rectangulum inſcribi deberet, cujus latus ZH, ad HG, eſſet in ratione b, ad d: tum faciendum eſſet quodlibet rectangulum ZIRE eidem æquale, ac deindè invenienda rectâ q, ad cujus quadratum, rectangulum bd, eandem rationem haberet, quam habet RI, ad ZI. Demùm circa rectangulum ZIRE, deſcribenda eſſet Ellipſis, cujus axis parallelus ZI, ad latus rectum, eſſet in ratione q, ad b. Secaret enim circulum in puncto K quæſito, quod indicaſſe ſufficiat.

Proble-mata Solida.

NOn exiſtimo difficile futurum, ei, qui methodum, qua in hoc Problemate ſolvendo uſi fuimus, rectè perceperit, illam ad tres Problematum Solidorum formulas applicare: breviter tamen aliquid addam ne quid eorum quæ in libello demonſtrata ſunt prætermiſſum videatur.

Ac primum conſtruenda proponatur æquatio cubica affecta affirmativè ſub latere, $bba + a^3 \parallel bbd$. Æquatione reſoluta in analogiſmum, erit ut bb, ad aa, ita a, ad $d-a$.

Sumatur ipſarum b, & a, tertia proportionalis e: erunt itaque quatuor in continua analogia.

$$b \,/\, a \,/\, e \,/\, d-a$$

Unde deducuntur tres ſimplices æquationes, ut prius.

$$be \parallel aa. \quad da-aa \parallel ee. \quad bd-ba \parallel ae.$$

Prima ad Parabolam, ſecunda ad Circulum, tertia ad Hyperbolam circa Aſymptotos. Compoſitæ etiam, ut $be+ee \parallel da$, ad Parabolam. $be-ee \parallel 2aa-da$, ad Ellipſim; aliæque deduci poſſunt. At pro $be \parallel aa$, ſumendo $\frac{bbe}{q} \parallel \frac{baa}{q}$, & hanc æquationem auferendo à prima compoſitarum, remanet

$$be+ee-\frac{bbe}{q} \parallel da-\frac{baa}{q}, \text{ ad infinitas Ellipſes.}$$

Vel addendo, fit $be+ee+\frac{bbe}{q} \parallel da+\frac{baa}{q}$ ad infinitas Hyperbolas.

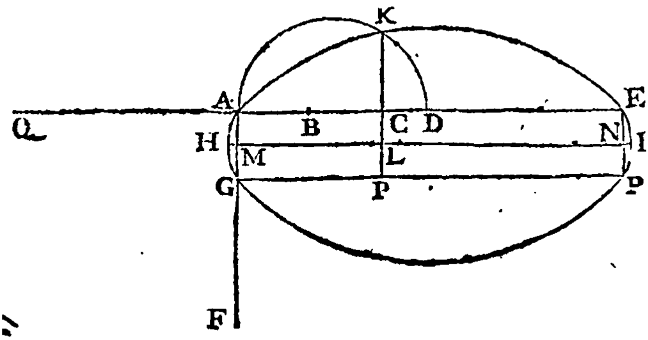
Rurſus pro $be+ee \parallel da$, ſumendo $\frac{bbe+bee}{q} \parallel \frac{bda}{q}$, & ab hac auferendo primam $be \parallel aa$, remanebit

$$\frac{bda}{q}-aa \parallel \frac{bbe}{q}-be+\frac{bee}{q} \text{ ad infinitas Ellipſes.}$$

Vel addendo $\frac{bda}{q}+aa \parallel \frac{bbe}{q}+be+\frac{bee}{q}$ ad infinitas Hyperbolas. Quas conſtruximus Propoſitione 7. & 8.

Nam in figura Propoſitionis 7. QA vel AF eſt b, AD, d, FG, aſſumta ad libitum, eſt q, AG $b-q$. Cumque factum ſit, ut FG ad FA, ſive q, ad b, ita AD, ſive d, ad AE; erit AE $\frac{bd}{q}$. Deſcriptus eſt autem ſuper AD ſemicirculus, & perfecto rectangulo AGRE, Ellipſis

circa



circa illud facta eſt, cujus axis parallelus AE, ad latus rectum, habet rationē AE, ad FG. Igitur ſi AC, ſit a, & CK, e, erit ob circulū rectangulū DCA, æquale quadrato CK, ſive $da - aa \parallel ee$.

Ob ellipſim vero, ut FA, ad FG, ita rectangulum ECA, ad rectangulum PKC, ſive analogiſmus,

$$b \,/\, q \,/\, \frac{bda}{q} - aa \,/\, be - qe + ee$$

& æquatio $bda - qaa \parallel bbe - bqe + bee$, ſive $\frac{bda}{q} - aa \parallel \frac{bbe}{q} - be + \frac{bee}{q}$. A quâ auferendo æquationem ad circulum, $da - aa \parallel ee$, remanet,

$$\frac{bda}{q} - da \parallel \frac{bbe}{q} - be + \frac{bee}{q} - ee.$$

Vel ductis omnibus in q, & applicatis ad $b - q$.

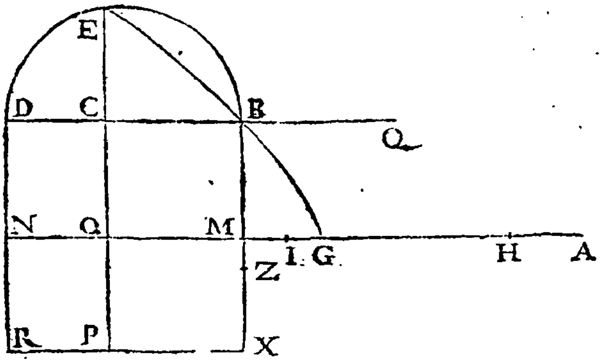
$da \parallel be + ee$; & demtâ rurſus æquatione ad circulum,

$aa \parallel be$: tres igitur b, a, e, ſunt continuè proportionales.

Sed ex æquatione $da - aa \parallel ee$, tres a, e, $d - a$, ſunt etiam continuè proportionales; igitur quatuor b, a, e, $d - a$, ſunt pariter in continuâ analogiâ; eſtque ut bb, ad aa, ita a, ad $d - a$; unde producitur æquatio $bbd - bba \parallel a^3$, ſive $bbd \parallel bba + a^3$, quæ conſtruenda proponebatur.

Eadem eſt conſtructio & demonſtratio Propoſitionis octavæ, in illius enim figurâ QB, vel BZ, eſt b, BD, vel MN, d, ZX ſumta ad libitum, eſt q, & quoniam factum eſt, ut ZX, ad ZB, ſive q, ad b, ita

 NM,



NM, ſive d, ad MA, erit MA $\frac{bd}{q}$. Cum autem ex MA, reſectæ ſint æquales MG, AH, itaut rectangulum HMG ad quadratum MB, dimidiæ MX, ſive $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}q$, habeat rationem BZ, ad ZX, ſive b, ad q; ex proprietate Hyperbolæ, vertice G, axe HN, per punctum B, deſcriptæ, rectangulum AOM, ad rectangulum PEC, habebit etiam rationem b, ad q.

Sed poſitâ BC vel MO, a, & EC, e, rectangulum AOM, eſt $\frac{bda}{q} + aa$, rectangulum verò PEC, $qe + be + ee$, erit igitur analogiſmus.

$$b / q / \frac{bda}{q} + aa / qe + be + ee.$$ & æquatio

$$\frac{bda}{q} + aa \parallel be + \frac{bbe}{q} + \frac{bee}{q}.$$

Cùm verò, ob ſemicirculum, ſuper BD deſcriptum, rectangulum BCD, ſit æquale quadrato CE, ſive $da - aa \parallel ee$; pro ee in ſuperiori æquatione, poſito ejus valore, fit

$$\frac{bda}{q} + aa \parallel be + \frac{bbe}{q} + \frac{bda - baa}{q},$$ ſive, ablatis æqualibus,

ducto reſiduo in q, & applicato ad $b + q$, $aa \parallel be$. Igitur $\frac{a^4}{bb} \parallel ee$. Et in æquatione $da - aa \parallel ee$ pro ee poſito valore ejuſdē; $da - aa \parallel \frac{a^4}{bb}$: hoc eſt $bdd \parallel bba + a^3$; ut prius.

Eodem modo reſolvitur æquatio affecta ſub latere affirmativè $a^3 + bba \parallel bbd$. Eſt enim analogiſmus $bb, aa, a, a + d$. & ſumta e, tertiâ proportionali ipſarum b; & a, habentur quatuor continuè proportionales $b, a, e, d + a$.

&

& æquationes ſimplices $be \parallel aa$.

$$da + aa \parallel ee.$$

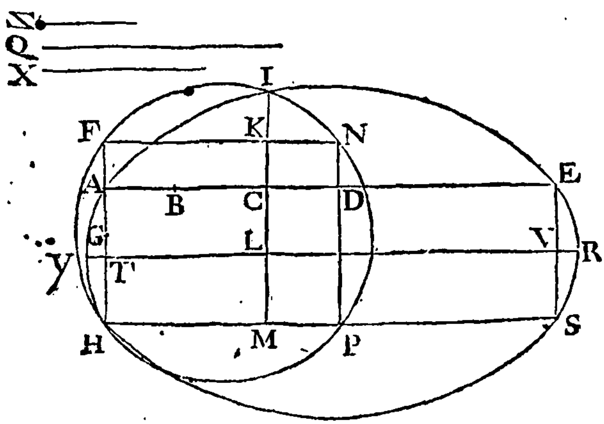
$$ae \parallel bd + ba.$$

Igitur $da \parallel ee - aa$. Vel ſubſtituto be pro aa; $da \parallel ee - be$. & detracto inde aa, hinc be, $da - aa \parallel ee - 2be$, æquatio ad circulum, ut patet.

Æquationes ad Ellipſes vel Hyperbolas plures ſunt, ut pro $da \parallel ee - be$, ſumendo $\frac{bda}{q} \parallel \frac{bee - bbe}{q}$, & auferendo utrimque æqualia, hinc be, inde aa.

$$\frac{bda}{q} - aa \parallel \frac{bee}{q} - be - \frac{bbe}{q}$$ ad infinitas Ellipſes.

Vel addendo $\frac{bda}{q} + aa \parallel \frac{bee}{q} + be - \frac{bbe}{q}$ ad infinitas hyperbolas, quas conſtruximus: Propoſitione 9. & 10. Meſolabi.



Eſt enim in figura Propoſitionis nonæ FN $\parallel d$, FG $\parallel b$, FH $\parallel 2b$, AG ſumta ad libitum, q, AE, ex cõſtructione, $\frac{bd}{q}$, FK $\parallel a$, IM $\parallel e$, MC $\parallel b + q$.

Itaque, rurſus ex cõſtructione Ellipſis, rectangulum SMH, ſive $\frac{bda}{q} - aa$, ad rectangulum MIC, ſive $ee - be - qe$, habebit rationem b, ad q, & per conſequens erit æquatio,

$$\frac{bda}{q} - aa \parallel \frac{bee - bbe}{q} - be.$$

Ob circulum verò, rectangulum NKF, ſive $da - aa$, æquale eſt rectangulo MIK, ſive $ee - 2be$, & auferendo hanc æquationem à præcedente,

 bda

$$\frac{bda}{q} - da \parallel \frac{bee}{q} - \frac{bbe}{q} + be - ee.$$

ſive ductis omnibus in q, & applicatis ad $b - q$, $da \parallel ee - be$, & tollendo ab hac, æquationem ad circulum; $be \parallel aa$, & $\frac{a^4}{bb} \parallel ee$: & in eadem æquatione ad circulum loco ee, & be, poſito ejus valore, $da \parallel \frac{a^4}{bb} - aa$: ſive $bbd \parallel a^3 - bba$.

Eadem applicari poſſunt ad hyperbolas Propoſitionis decimæ. Nec major difficultas eſt in æquatione amphibolâ, $bba - a^3 \parallel bbd$. Sunt enim rurſus quatuor in continuâ analogiâ b, a, e, $a - d$, & æquationes, $be \parallel aa$. $aa - da \parallel ee$. $ee \parallel ba - bd$. & auferendo à duplâ primæ, ſecundam, remanet æquatio,

$$2be - ee \parallel aa + da \text{ ad circulum.}$$

Cùm verò be, & aa, idem ſint; erit etiam æquatio $be - ee \parallel da$, vel $\frac{bbe - bee}{q} \parallel \frac{bda}{q}$, & additis æqualibus,

$$be + \frac{bbe}{q} - \frac{bee}{q} \parallel \frac{bda}{q} + aa, \text{ ad infinitas Ellipſes.}$$

Quas conſtruximus Propoſitione 11.

Similiter ab æquatione $be \parallel aa$, auferendo hanc, $\frac{bbe - bee}{q} \parallel \frac{bda}{q}$, fiet $be \frac{-bbe + bee}{q} \parallel aa \frac{-bda}{q}$ ad infinitas Hyperbolas, quas Propoſitione 12. exhibuimus, ut evidens erit conſtructionem ibi præſcriptam, cum hac Analyſi conferenti.

Cæterùm, ſi quis, ut in Problemate de duabus mediis ſupra factum eſt, ita & hic loco a, vel e, ſubſtituere velit alterutram $\frac{by}{q}$, $\frac{bv}{q}$, vel utramque; licebit non tantum infinitas conſtructiones alias reperire, ſed omne Problema Solidum ſolvere per circulum, & quamcumque datam ſectionem conicam. Quod cum in Parabolâ data minus difficultatis habeat, contenti erimus id unico exemplo in Ellipſi & Hyperbolâ demonſtrare.

Sit igitur conſtruenda æquatio cubica affecta ſub latere affirmativè, cujus analogiſmus ſupra inventus eſt,

b / al

$b / a / e / d-a$. fiat nunc alius,

$b / \frac{by}{q} / \frac{bv}{q} / d-\frac{by}{q}$. Ex quo deducantur æquationes,

$\frac{bbv}{q} \| \frac{bbyy}{qq}$, vel $qv \| yy$, ad parabolam quamlibet.

$\frac{dby}{q} - \frac{bbyy}{qq} \| \frac{bbvv}{qq}$, ſive $\frac{qdy}{b} - yy \| vv$, ad quemlibet circulum.

$\frac{bbyv}{qq} \| bd - \frac{bby}{q}$, ſive $qy + yv \| \frac{qqd}{b}$ ad quamlibet Hyperbolam circa Aſymptotos angulum rectum, ut ſemper ſuppoſuimus, continentes.

Igitur quoniam $qv \| yy$, fiet, ſumtâ qualibet z, $\frac{zqv}{b} \| \frac{zyy}{b}$. & junctâ hac æquatione cum aliâ $\frac{qdy}{b} - yy \| vv$, habebimus

$$\frac{qdy}{b} - yy + \frac{zyy}{b} \| vv + \frac{zqv}{b}$$

& ductis omnibus in b, ac ſuppoſita b majore quam z, erit analogiſmus $b / b-z / \frac{qdy}{b-z} - yy / vv + \frac{zqv}{b}$

ad infinitas Ellipſes, pro variâ magnitudine ipſius z ad libitum aſſumtæ: quam ſi ſupponeremus majorem quam b, fieret

$$b / z-b / \frac{qdy}{z-b} + yy / vv + \frac{zqv}{b}$$

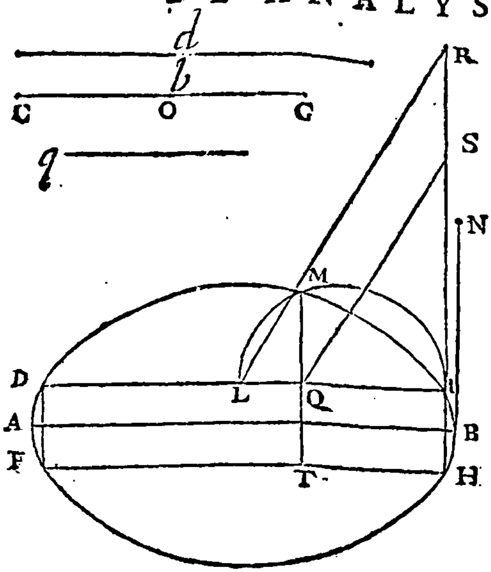
ex eadem ratione ad infinitas Hyperbolas. At ſi ſupponeremus b & z æquales, prodiret nova æquatio ad quamlibet Parabolam, nempe $\frac{qdy}{b} \| vv + qv$.

Invenire etiam licet Ellipſes infinitas mutando ſigna partium æqualium, hoc modo, cum $\frac{zqe}{b}$ æquale ſit $\frac{zyy}{b}$, erit

$$\frac{qdy}{b} - yy - \frac{zyy}{b} \| vv - \frac{zqv}{b}$$, & analogiſmus,

$$b / b+z / \frac{qdy}{b+z} - yy / vv - \frac{zqv}{b}$$. ad infinitas Ellipſes, ut prior.

Detur



Detur nũc quelibet Ellipſis ADB, cujus axis major ſit AB, latus rectum BN, & in æquatione $bba + a^3 \parallel bbd$, ſit data CG, æqualis b. Secetur CG in O, itaut ſit eadem ratio CG, ad GO, quæ eſt AB, ad BN: deindè inſcribatur Ellipſi datę rectangulum FHID, in quo ratio lateris FH, ad latus HI, ſit eadem, quam habet rectangulum ex d in b, ſive in GC, ad rectángulum COG. Demum ſecta DI in L, in eadem ratione, quâ CG ſecatur in O; ſuper IL diametro, deſcribatur ſemicirculus LMI, ſecans Ellipſim in M: unde cadat in DI, normalis MQ, quæ producta ſecet FH, in T. Et productâ HI, in R, ut IR, ſit æqualis d, datæ in æquatione, ducatur LR, & eidem parallela QS.

Dico IS eſſe a quæſitam.

Fiat ut RI, ad IL, ita CG ad q. Quoniam igitur eſt ut CG, ſive b, ad q, ita RI, ſive d, ad IL; erit IL $\frac{qd}{b}$. Et quoniam factum eſt ut OG, ad GC, ita IL, ad ID, hoc eſt, ſi CO dicatur z, ut $b - z$, ad b, ita $\frac{qd}{b}$, ad ID; erit ID, $\frac{dq}{b-z}$. Sed, ex conſtructione, ut bd, ad rectangulum COG, ſive $bz - zz$, ita FH, vel DI, hoc eſt $\frac{dq}{b-z}$, ad HI, erit igitur HI $\frac{zq}{b}$; cui æqualis eſt QT. Itaque ſi QM dicatur v, erit

TM

TM $v + \frac{zq}{b}$, & ſi QI dicatur y, erit LQ, $\frac{qd}{b} - y$.

Nunc ob circulum rectangulum IQL, æquale eſt quadrato QM, hoc eſt,

$$\frac{qdy}{b} - yy \parallel vv.$$

Ob Ellipſim verò, eſt ut AB, ad BN, ſive CG, ad GO, hoc eſt b, ad $b - z$, ita rectangulum DQI, ad rectangulum TMQ; eſt autem rectangulum DQI, $\frac{dqy}{b-z} - yy$, & rectangulum TMQ, $\frac{zqv}{b} + vv$, erit igitur æquatio, $dqy - byy + zyy \parallel zqv + bvv$,

$$\text{ſive } \frac{dqy}{b} - yy + \frac{zyy}{b} \parallel \frac{zqv}{b} + vv.$$

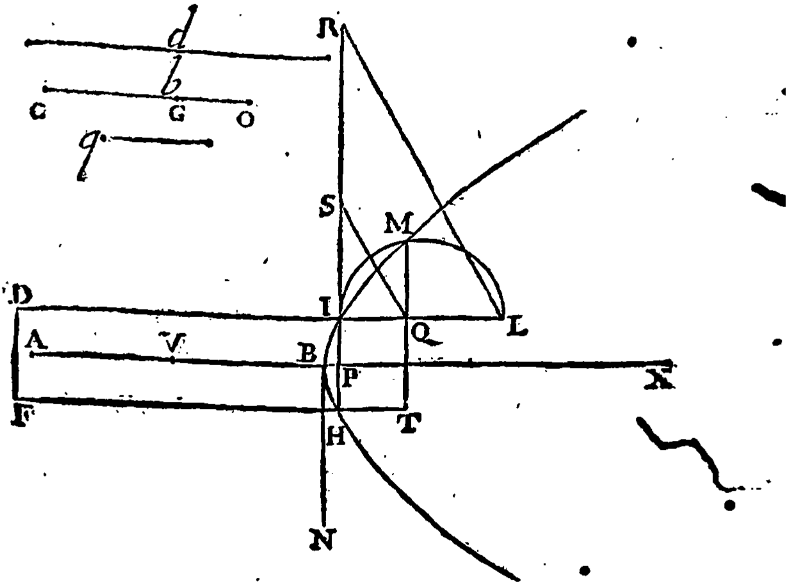
Conſtruximus itaque æquationes propoſitas: unde reliqua ſequuntur repetendo veſtigia Analyſeos: nam, ablatâ priore æquatione ab has, remanet $\frac{zyy}{b} \parallel \frac{zqv}{b}$, ſive $yy \parallel qv$, hoc eſt $\frac{y^4}{qq} \parallel vv$. Itaque, in æquatione priori, pro vv, poſito ejus valore, fiet,

$$\frac{qdy}{b} - yy \parallel \frac{y^4}{qq}. \text{ ſive } d - \frac{by}{q} \parallel \frac{by^3}{q^3}.$$ Vel ductis omnibus in bb / $bbd - \frac{b^3y}{q} \parallel \frac{b^3y^3}{q^3}$.

Cùm verò ſit, ut LI, ad IR, ſive $\frac{qd}{b}$, ad d, hoc eſt q, ad b, ita QI, ſive y, ad IS; erit IS, $\frac{by}{q}$, ſive a. Itaque in ultima æquatione pro $\frac{by}{q}$, & $\frac{b^3y^3}{q^3}$, poſito eorum valore, a, & a^3, fiet $bbd - bba \parallel a^3$.

Conſtruamus nunc æquationem ad infinitas Hyperbolas, cujus analogiſmus erat b / $z - b$ / $\frac{qdy}{z-b}$ / $vv + \frac{zqv}{b}$.

Datis igitur, ut prius, d, & b, æquali CG; ac hyperbolâ qualibet, cujus latus tranſverſum AB, rectum BN, vertex B, axis BX, centrum V; producatur CG, in O, ita ut CG, ad GO, habeat eandem rationem, quam habet AB, ad BN. Tum applicetur ad axem normalis IP, quæ ad PV, ſit in ratione rectanguli bd, ad rectangulum



COG, productâque IP ad Hyperbolam in H, ducatur ID, parallela PV, & ejuſdem dupla; ac perficiatur rectangulum IHFD. Deindè, productâ DI in L, itaut DI, ad IL, ſit quemadmodum CG, ad GO, ſuper IL diametro, deſcribatur ſemicirculus IML, ſecans Hyperbolam in M puncto, ex quo cadat in IL, normalis MQ, occurrens FH productæ, in T.

Demùm productâ HI, in R, donec IR ſit æqualis d, jungatur LR, & eidem parallela ducatur QS.

Dico IS eſſe a quæſitam.

Fiat ut RI, ad IL, ita CG, ſive b, ad q. Quoniam igitur RI, eſt d, erit IL $\frac{qd}{b}$: & quoniam factum eſt ut OG, ad GC, ſive (ſi CO ut in ſuperiori conſtructione, vocetur z) ut $z-b$, ad b, ita IL ſive $\frac{qd}{b}$, ad DI, erit DI $\frac{dq}{z-b}$. Sed factum eſt etiam ut bd, ad rectangulum COG, ſive $zz-bz$, ita VP, ad PI, vel ſumtis duplis, ita DI, ad HI; erit

erit igitur HI, vel QT ipſi æqualis, $\frac{zq}{b}$. Et ſi QI dicatur y, cùm rectangulum IQL, æquale ſit quadrato QM, ob circulum, erit æquatio,

$$\frac{qdy}{b} - yy \parallel vv, \text{ ut prius.}$$

Sed, ob Hyperbolam, ut AB, ad BN, ſive CG, ad GO, ex conſtructione, hoc eſt b, ad $z - b$; ita rectangulum DQI, ſive $\frac{dqy}{z-b} + yy$, ad rectangulum TMQ, vel $\frac{zqv}{b} + vv$; & æquatio

$$\frac{dqy}{b} - yy + \frac{zyy}{b} \parallel \frac{zqv}{b} + vv.$$

Reliqua patent ex Propoſitione præcedenti, in quâ, ex conſtructione, eaſdem omninò æquationes deduximus.

Nec major eſt difficultas in conſtruendâ æquatione negativâ, vel amphibolâ, ideoque pluribus exponere ſuperſedemus. Cæterùm ſi quis datâ qualibet Parabolâ, vel Hyperbolâ circa aſymptotos, angulum rectum continentes, cum circulo Problemata ſolvere vellet, ſectione illâ proportionali non eſſet opus. Factis enim, ut prius, proportionalibus $b / a / e / d - a$, loco e, tantum ſubſtituendum eſſet $\frac{by}{q}$. Deducerentur enim æquationes ſequentes, quæ a, quæſitam, exhiberent. Nempe

$$\frac{bby}{q} \parallel aa, \text{ ad quamlibet Parabolam.}$$

$ay \parallel qd - qa$, ad quamlibet Hyperbolam circa aſymptotos, ſed illa ſumenda eſt, cujus aſymptoti angulum rectum contineant, ut cum circulo componi poſſit, eſt & alia æquatio,

$da - aa \parallel \frac{bbyy}{qq}$, ad infinitas Ellipſes, ex cujus additione cum primâ, fit alia $da \parallel \frac{bbyy}{qq} + \frac{bby}{q}$.

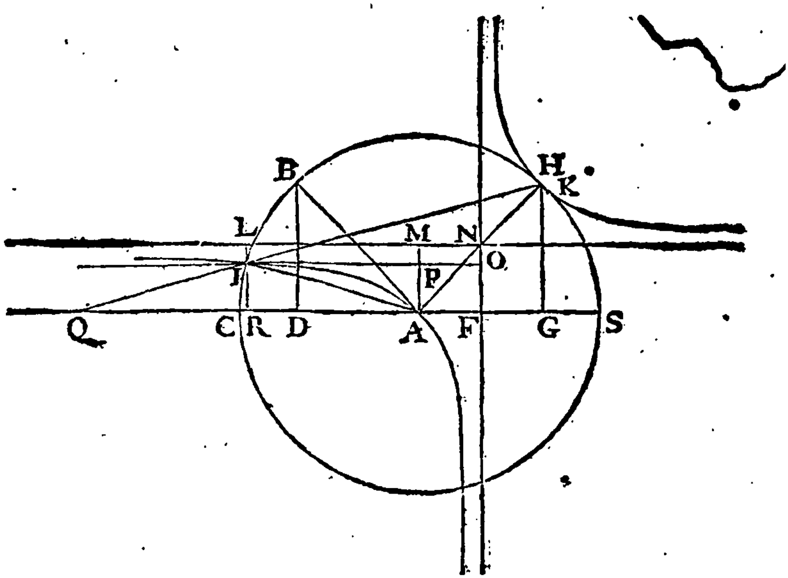
ſive $\frac{qqda}{bb} \parallel yy + qy$, rurſus ad quamlibet Parabolam.

& ab hac ablatâ primâ æquatione,

$\frac{qqda}{bb} - aa \parallel yy + qy - \frac{bby}{q}$, ad circulum, qui cum qualibet Parabolâ, vel Hyperbolâ circa aſymptotos rectangulas, componi poteſt ad Problematis effectionem, quod monuiſſe ſufficiat, ne ſupervacua diligentia Lectoris ingenio diffidere videar.

Anguli triſectio.

SUpereſt nunc ut anguli triſectionem, cujus duplicem conſtructionem in priore libello dedi, Propoſitionibus 13. & 15. paucis attingam. Analyſis Propoſitionis 13. facillima eſt, hoc modo. Datur in figurâ ejuſdem Propoſitionem angulus triſecandus BAC, quem metitur arcus BC, circuli CHS, centro A, quolibet intervallo deſcripti, cujus diameter eſt CAS.



CI ſupponatur eſſe pars tertia arcus CB, & ſumto arcu SH, æquali CB, ducta intelligatur recta HI occurrens diametro productæ in Q, junctaque AI, ex I, cadat in QA, normalis IR; illa dividet AQ in partes æquales, ut facilè oſtenditur. Nam ſi IA producta intelligatur uſque ad circumferentiam, abſcindet ab occurſu uſque ad S, arcum

æqua-

æqualem IC, ſive dimidio BI, qui arcus ſic abſciſſus, junctus arcui SH, complet arcum cui inſiſtit angulus AIH, ad circumferentiam: eſt autem arcus ille duplus arcus BI, utpotè compoſitus ex dimidio & ſeſquialtero ejuſdem; igitur angulus AIH ad circumferentiam, æqualis eſt angulo BAI ad centrum, & per conſequens duplus anguli IAQ. Cùm vero idem angulus AIH, æqualis ſit angulus IAQ, IQA, internis & oppoſitis, patet illos eſſe æquales inter ſe, & conſequenter AR, RQ, etiam eſſe æquales.

Nunc radius circuli dicatur b; BD, vel HG, d, normales nempe ex B & H in diametrum; DA vel AG, n, AR, vel RQ, a, RI, e.

Quoniam eſt ut QR, ad RI, ita QG, ad GH, erit in terminis Analyticis,

$$a \,/\, e \,/\, 2a + n \,/\, d \,/$$ & æquatio,

$2ae + ne \parallel da$ ad Hyperbolam circa Aſymptotos, quam ibi deſcripſimus, & quæ cum circulo dato Problema ſolvit. Eſt autem æquatio ad circulum $bb \parallel aa + ee$ cùm quadratum AI, ſit æquale quadratis AR, RI.

Infinitas alias ſectiones ſi quis velit, faciat loco $2ae + ne \parallel da$, hanc

$$\frac{2bae}{q} + \frac{bne}{q} \parallel \frac{bda}{q}.$$

& additis hinc inde ee, & $bb - aa$ æqualibus, ob circulum,

$$ee + \frac{2bae}{q} + \frac{bne}{q} \parallel \frac{bda}{q} + bb - aa,$$

& addito rurſus $\frac{bbaa}{qq} + \frac{1}{4}\frac{bbnn}{qq} + \frac{bbna}{qq}$ utrique parti æquationis,

$$ee + \frac{2bae + ne}{q} + \frac{bbaa + \frac{1}{4}bbnn + bbna}{qq} \parallel \frac{bda}{q} + bb - aa$$
$$+ \frac{bbaa + \frac{1}{4}bbnn + bbna.}{qq}$$

Quæ æquatio eſt ad infinitas Ellipſes, vel Hyperbolas, vel etiam ad Parabolam; pro variâ nimirum ratione q ad b.

Si enim q, ſupponatur major b, fiet hic analogiſmus,

$$qq/qq-bb/\frac{bqda+bbqq+\frac{1}{4}bbnn+bbna}{qq}-aa/ee$$

$$+\frac{2bae+bne}{q}+\frac{bbaa+\frac{1}{4}bbnn+bbna}{qq},$$

conſtructionem indicans infinitarum Ellipſium, quandoquidem $ee+\frac{2bae+bne}{q}+\frac{bbaa+\frac{1}{4}bbnn+bbna,}{qq}$ ſit quadratum à latere $e+\frac{ba+\frac{1}{2}bn}{q}$. At ſi q, ſupponatur minor b, analogiſmus prior transformatur in hunc $qq/bb-qq/\frac{bqda+bbqq+\frac{1}{4}bbnn+bbna}{qq}+aa/ee\frac{+bae+bne}{q}+\frac{bbaa+\frac{1}{4}bbnn+bbna}{qq}$, ad infinitas Hyperbolas.

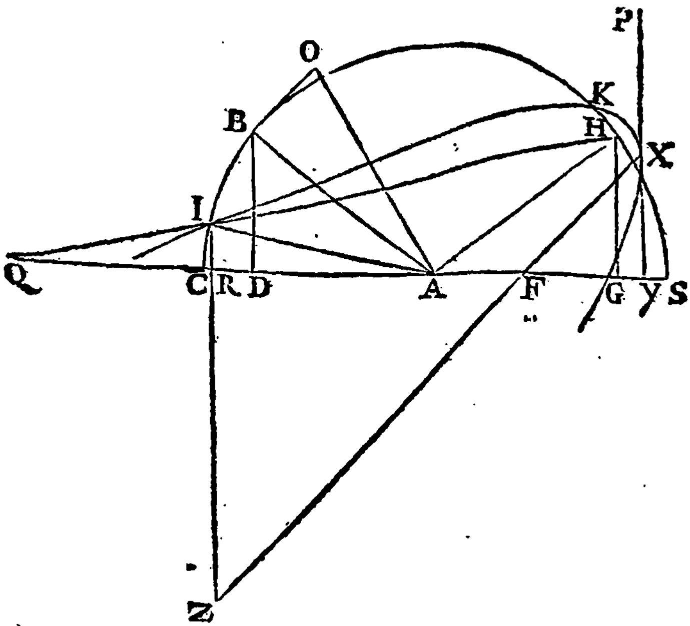
Suppoſitâ verò æqualitate rectarum q & b, remanet æquatio compoſita ex duabus ſuperius inventis, nempe

$$ee+2ae+ne+aa+\tfrac{1}{4}nn+na \,\|\, da+bb+\tfrac{1}{4}nn+na$$

additis ſcilicet utrimque æqualibus $aa+\frac{1}{4}nn+na$.

Hanc Parabolam deſcripſimus Propoſitione 15. denominatis enim, ut prius, lineis quæ utrique figuræ, hujus & 13.ª communes ſunt, cùm BO aſſumta ſit æqualis dimidiæ DA, erit quadratum AO, $bb+\frac{1}{4}nn$. Cùm verò factum ſit, ut utraque BD, DA, ſive $d+n$, ad AO, ita AO ad AY, erit AY $\frac{bb+\frac{1}{4}nn}{d+n}$; cui æqualis eſt YX, tum angulus YFX ſit ſemirectus. Deindè factum eſt ut XF, ad FY, ita utraque BD, DA, ad XP, latus rectum Parabolæ, deſcriptæ vertice X, circa diametrum XF, cujus applicatæ parallelæ ſunt XP. Itaque ex puncto I, ubi occurrit circulo, applicata IZ, ſecante diametrum SC, in R, cum FA, ſit dimidia AG, & angulus ZFR, ſemirectus, erit ZR, $\frac{1}{2}n+a$, & tota IZ, $e+\frac{1}{2}n+a$, cujus quadratum eſt,

ee



$$ee + \tfrac{1}{4}nn + aa + na + ne + 2ae.$$

Sed cùm factum ſit, ut XF, ad FY, ſive XZ, ad RY, ita utraque BD, DA, ad PX; rectangulum PXZ, æquale erit rectangulo ſub BD, DA, ſive $d + n$, in RY ſive $a + \frac{bb + \frac{1}{4}nn}{d + n}$. Erit igitur æquatio,

$$da + na + bb + \tfrac{1}{4}nn \parallel ee + \tfrac{1}{4}nn + aa + na + ne + 2ae.$$

Quæ conſtruenda proponebatur.

Poſſunt & aliæ æquationes variis modis reperiri ad diverſas ſectiones; ut productâ BD ad circumferentiam, & ductâ ad punctum concurſus rectâ à puncto I & ab eodem puncto ductâ normali ad BD, quę æqualis erit RD, fiet triangulum ſimile triangulo IRA: cùm utrumque ſit rectangulum, & angulus ad circumferentiam, inſiſtens arcui BI, ſit æqualis angulo ad centrum, ſuper arcu IC alterius dimidio. Itaque erit ut a, ad e, ita $d + e$, ad $a - n$, & æquatio

de.

$de + ee \parallel aa - na$, ad Hyperbolam æqualium laterum, & jungendo hanc cum æquatione ad circulum, fiet ablatis æqualibus,

$de + bb \parallel 2aa - na$ ad Parabolam.

Itaque cum Parabolâ vel Hyperbolâ rurſus ope circuli ſolvi poterit Problema. Et ſi loco $be - ee \parallel aa$, fiat $\frac{b3 - bee}{q} \parallel \frac{baa}{q}$, addaturque hæc æquatio alicui ex prioribus, ut, exempli gratiâ, proximæ æquationi ad Hyperbolam, habebitur, $de + ee + \frac{b3 - bee}{q} \parallel aa - na + \frac{baa}{q}$ ad infinitas Hyperbolas, vel Ellipſes, pro varia ratione q, ad b: exceptâ ſcilicet ratione æqualitatis; hoc enim caſu redit æquatio ad Parabolam, eadem quam ſupra poſuimus. Sed tædio ſim, ſi in re facili, & ſæpè ſuprà oſtenſa, pluribus inſiſtam. Adnoto tantùm, quod ſingulare eſt in hoc Problemate, non opus eſſe alia Analyſi, ut cum qualibet ſectione conicâ & circulo ſolvi poſſit. Nam omnes æquationes ad Parabolam, vel Hyperbolam æqualium laterum, ſunt ad quamlibet; & omnes æquationes ad infinitas Hyperbolas, vel Ellipſes, ſunt etiam ad quamlibet; cùm circulus cujus arcus angulum datum metitur, poſſit major ac minor ad libitum aſſumi: ut Problematis hujus conditiones, cum iis quæ in aliis ante demonſtrata ſunt conferenti, evidentius patebit.

Effectio Problematum Solidorum abſque reductione.

Abſolvimus igitur quod propoſitum erat; Effectionem nimirum omnium Problematum Solidorum, per circulum & quamlibet ſectionem conicam datam: cùm omnia, vel ad tres formulas ſupra explicatas, vel ad inventionem duarum mediarum inter extremas datas, & anguli triſectionem reducantur. Verùm non ingratum fortaſſe nec inutile erit, ſi methodum hanc ad Problemata Solida quomodolibet affecta, abſque ullâ reductione conſtruenda, extendi breviter oſtendatur. Unicum exemplum in ſingulis affectionum ſpeciebus ſufficiet, quo palam fiat, inter æquationes aliquot ad diverſas ſectiones, reperiri etiam unam ad circulum, qui cum aliis ſectionibus compoſitus, Problemati ſatisfaciat. Cæterùm non opus erit, ut exiſtimo oſtendere quomodo in æquationibus, quantitates datæ, ſecundùm Problematum varietatem, præparandæ ſint, ut in formâ quâ infra utemur compareant; quandoquidem id cuivis Geometriæ tironi non ignotum ſit.

Detur

Detur itaque primò, Æquatio cubica affecta ſub quadrato, exempli gratiâ, hæc affirmativa, $baa + a^3 \parallel bdd$.

Reſolvatur in Analogiſmum.

$$dd / aa / b + a / b.$$

Nunc, ſit e, media inter b, & $b + a$: & fiet æquatio

$$bb + ba \parallel ee \text{ ad parabolam,}$$

ac duplex Analogiſmus $d / a / b + a / e$. Et, $d / a / e / b$. Ex quibus oriuntur Æquationes, $ba + aa \parallel de$, iterùm ad parabolam.

Et $ae \parallel bd$ ad hyperbolam circa aſymptotos.

Auferatur poſterior ad parabolam à priore, remanebit

$bb - aa \parallel ee - de$, ad circulum, quocum & una parabolarum, vel hyperbola Problemati ſatisfiet.

Eadem omninò eſt ratio in affectâ negativè vel amphibolâ. Non repeto autem in hoc exemplo, uti nec in ſequentibus, modum deducendi datas æquationes ad infinitas ſectiones, vel etiam ad quamlibet, quandoquidem ea quæ in præcedentibus dicta ſunt his æquationibus facile poſſint applicari.

Æquatio affecta ſub latere & quadrato, eodem modo conſtruitur. Si enim $a^3 - paa + bba \parallel bbd$. Sivè $bba - bbd \parallel paa - a^3$.

Erit igitur, $bb / aa / p - a / a - d$.

Et, ſumtâ rurſus inter $p - a$, & $a - d$, mediâ proportionali e, habebitur æquatio ad circulum, $pa + da - aa - pd \parallel ee$.

Et duplex Analogiſmus $b / a / p - a / e$ ac $b / a / e / a - d$.

Undè duplex æquatio $be \parallel pa - aa$, ad parabolam.

$ba - bd \parallel ae$ ad hyperbolam circa aſymptotos.

Circulus in hoc exemplo ſtatim ſeſe offert: quod ſi non occurriſſet prima æquatio compoſita cum alia æquatione ad parabolam, ut in priori exemplo, illum exhibuiſſet, nunc autem dat Ellipſim, ſcilicet $be + ee \parallel 2pa + da - 2aa$.

Vel aliam parabolam $ee - be \parallel da$.

Tranſeamus ad æquationes quarti gradus, & data ſit in exemplum Amphibola affecta ſub cubo, $2ba^3 - a^4 \parallel bbdd$.

Erit igitur, demto utrimque $bbaa$,

$$2ba^3 - a^4 - bbaa \parallel bbdd - bbaa.$$

Sivè mutatis omnibus ſignis,

$a^4 + bbaa - 2ba^3 \parallel bbaa - bbdd$ eritque eadem ratio bb, ad aa, quæ eſt $aa + bb - 2ba$, ad $aa - dd$.

Et poſito $aa - dd$ æquari ee, quæ æquatio erit ad hyperbolam æqualium laterum, fient proportionales,

$b / a / b - a / e$. Et æquatio ad parabolam

$ba - aa \| be$

A cujus duplo auferendo aliam ad hyperbolam, remanebit

$2ba - aa - dd \| 2be + ee$ ad circulum.

In affectis ſub latere eſt eadem facilitas. Nam affectas ſub quadrato tantùm prætereo, cùm ad locum planum ſpectent. Ut ex datâ $b^3 a - a^4 \| bbdd$, fit $b^3 a - bbdd \| a^4$, & Analogiſmus,

$bb / aa / ba - dd$

& poſito ee, æquari $ba - dd$, quæ æquatio erit ad Parabolam, habentur tres continuè proportionales $b / a / e$, & æquatio rurſus ad Parabolam $be \| aa$, quæ ablata à priori, dat $ee - be \| ba - dd - aa$ æquationem ad circulum.

Nec operoſior eſt hæc æquationis ad circulum inventio in affectis ſub cubo & quadrato. Ut ſi detur $ppaa + ba^3 - a^4 \| bbdd$. Fit enim

$bb / aa / pp + ba - aa / dd$.

Et faciendo $pp + ba - aa \| ee$ habetur circulus, & proportionales $b / a / e / d$, ex quibus oritur æquatio ad Aſymptotos $ae \| bd$, cujus duplum junctum æquationi priori dat

$pp + ba - aa + 2bd \| ee + 2ae$. Sivè

$pp + ba + 2bd \| aa + ee + 2ae$, æquationem ad Parabolam, cujus diameter ad circuli diametrum inclinatur angulo ſemirecto, applicatæ verò ſunt eidem circuli diametro perpendiculares: vt in propoſitionibus 14. & 15.

Verùm, quoniam tam in hac æquationum ſpecie, mutatis ſignis + & −, quàm in magis affectis, æquatio ad circulum ſæpè inventu difficilis eſt, ſatis hæc ſint ad oſtendendam methodi, quâ in præcedentibus uſi ſumus, amplitudinem. Nec enim opus eſt pluribus inſiſtere, cùm præſto ſit Regula Vniverſalis, quæ omnes omninò æquationes quomodolibet affectas complectitur.

Regula univerſalis. NAm vel ad quartum gradum aſcendunt, vel ſubſiſtunt in tertio. Si hoc; multiplicatione per a, ſivè quantitatem incognitam, ad quartum gradum promovendæ ſunt. Exempli gratiâ, ex hâc,

$a^3 - 2baa + bna \| bbd$

faciendâ

facienda eſt alia, $a^4 - 2ba^3 + bnaa \| bbda$.

Hoc facto; vel ſub cubo etiam erunt affectæ; vel ſub aliis gradibus tantùm.

Si ſub cubo etiam, ſivè affirmativè ſivè negativè, ut $a^3 +$ vel $- 2ba^3$; facienda eſt pari modo æquatio ad Parabolam quamlibet, $aa + $ vel $- ba \| qy$; ſumtâ ſcilicet q ad libitum, & b dimidia coefficientis ad cubum.

Si verò ſub aliis gradibus dumtaxat affectæ fuerint, ſufficiet æquatio ad quamlibet Parabolam, $aa \| qy$.

Exemplis illuſtranda eſt Regula. Sit igitur primò æquatio quarti gradus, affecta ſub omnibus gradibus parodicis,

$$a^4 - 2ba^3 + bnaa + bbpa \| bbdd$$

Reſolvatur in Analogiſmum, ut ratio Regulæ evidentius appareat,

$$bb / aa / aa - 2ba + bn / dd - pa.$$

Quoniam igitur in æquatione habetur $a^4 - 2ba^3$, ſumenda eſt ex Regulæ præſcripto, æquatio ad quamlibet parabolam $aa - ba \| qy$.

Igitur aa, æquabitur $ba + qy$.

Nunc in Analogiſmo præcedenti, pro aa ponatur ejus valor $qy + ba$, fiet

$$bb / qy + ba / qy - ba + bn / dd - pa.$$

Et æquatio nova, $qqyy + bnqy - bbaa + bbna \| bbdd - bbpa$, ad infinitas ſcilicet Hyperbolas, pro varia ratione q, ad b.

Et ſi pro $-bbaa$ ſubſtituatur ulterius ejus valor, ex hypotheſi, nempè $-bbqy - b^3a$: fiet

$$qqyy + bnqy - ba^3 + bbna \| bbdd - bbpa. \text{ Sivè}$$

$$yy + \frac{bn - bb}{q} y \| \frac{bbdd - bbpa - bbn + b^3}{qq}$$

Quæ rurſus eſt ad quamlibet Parabolam. Fiet autem ad circulum, ſi ab eâ auferatur prior ad Parabolam, hoc modo

$$yy + \frac{bn - bb}{q} y - qy \| \frac{bbdd - bbpa - bbn + b^4}{qq} + ba - aa$$

Infinitæ Ellipſes inveniri potuiſſent, addendo primæ æquationi ad infinitas Hyperbolas, æquationem ad Parabolam ductam in qq,

 ſupponendo

ſupponendo q majorem b, vel etiam ductam in bb, multiplicatum per quemlibet numerum, exempli gratiâ, per 2, ut ſequitur

$$qqyy + bnqy - bbaa + bbna + 2bbaa - 2b^3a = bbdd - bbpa + 2bbqy.$$

Igitur cum hoc circulo & qualibet Parabolâ (idque dupliciter) vel infinitis Hyperbolis aut Ellipſibus; vel etiam cum qualibet, ſi quis methodum ſupradictam hic applicare velit, conſtruetur æquatio propoſita.

At ſi deficeret in æquatione $2ba^3$, ut in hac,

$$a^4 + bnaa + bbpa = bbdd.$$

Sufficeret loco aa, ponere qy, ex æquatione ad Parabolam $aa = qy$. Haberetur enim $qqyy + bnaa + bbpa = bbdd$ ad infinitas Ellipſes, pro ratione qq, ad bn, vel etiam ad circulum, ſi qq æquaretur bn.

Ac iterùm $qqyy + bnqy + bbpa = bbdd$. Sivè

$$yy + \frac{bny}{q} = \frac{bbdd - bbpa}{qq}$$ ad quamlibet Parabolam.

A quâ auferendo hinc indè æqualia, qy, & aa; remaneret æquatio ad circulum, $yy + \frac{bny}{q} - qy = \frac{bbdd - bbpa}{qq} - aa.$

Et hæc Regula generalis eſt pro omnibus æquationibus ſolidis quomodolibet affectis, ſivè quarti gradus ſint, ſivè tertii, dummodò ut ſupradictum eſt, attollantur ad quartum. Nam ex hâc æquatione

$$a^3 - 2baa + bna + bbp = 0$$

faciendo aliam $a^4 - 2ba^3 + bnaa + bbpa = 0$ ex Regulâ, prodit hæc æquatio, $qqyy + bnqy + bbna - bbaa + bbpa = 0$ ad infinitas Hyperbolas & rurſus alia ad quamlibet parabolam,

$$yy + \frac{bn - bb}{q}\,y = \frac{-bbpa - bbn + b^3}{qq}$$

& tandem alia ad circulum.

$$yy + \frac{bny - bby}{q} - qy = \frac{-bbpa - bbn + b^3}{qq} + ba - aa$$

Quæ tres æquationes hoc ſolùm à prioribus differunt, quod in his non inveniatur quantitas $bbdd$; quâ ſolâ etiam differebant æquationes quarti

quarti & tertii gradus, quæ conſtruendæ erant.
Imò ſi ulterius deeſſet $bbpa$, & daretur æquatio $a^4 - 2ba^3 + bnaa = 0$ inveniretur æquatio ad circulum

$$yy \begin{array}{l} + bny - qy \\ - bb \\ \hline q \end{array} = \begin{array}{l} - bbna + ba - aa. \\ + b^3 \\ \hline qq \end{array}$$

Et aliæ æquationes pariter, quæ ab his ultimis ſolâ quantitate $bbpa$ differrent. Quod quidem addo, ut Regulæ amplitudinem oſtendam, cùm non ignorem tanto molimine opus non eſſe, ut hæc æquatio conſtruatur: eſt enim plana ut patet, nempè $2ba - aa = bn$.

Si quis tamen, ut hoc obiter innuam, illam per hunc circulum conſtruere vellet, poſſet ex datis aliam planam æquationem elicere quæ cum illo juncta propoſito ſatisfaceret. Nam ex $2ba - aa = bn$, & $aa - ba = qy$, ſimul junctis, fit $ba = bn + qy$, æquatio ad lineam rectam. Liceret itaque cum lineâ rectâ, & infinitis circulis, quandoquidem q ſumi poſſit ad libitum, æquationem propoſitam conſtruere, ſi quis id tanti eſſe exiſtimaret.

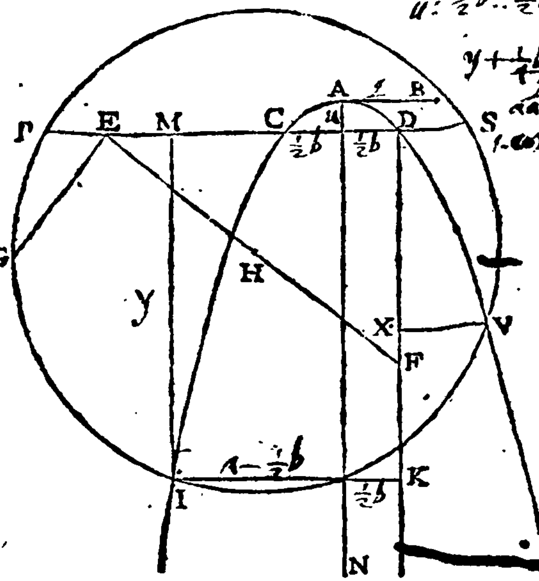
Conſtructiones quas Regula requirit, faciles ſunt; unam tamen addam in exemplum per circulum & parabolam. Sit itaque æquatio quarti gradus ſuo omnibus gradibus parodicis affecta,

$$a^4 - 2ba^3 - bnaa - bbpa = bbdd$$

Ex Regulâ, æquatio ad Parabolam erit, $aa - ba = qy$.
Æquatio verò ad circulum,

$$yy \begin{array}{l} - bny - qy \\ - bb \\ \hline q \end{array} = \begin{array}{l} bbdd + bbpa + ba - aa \\ + bbn \\ + b^3 \\ \hline qq \end{array}$$

Detur nunc quælibet Parabola, cujus axis AN, vertex A, latus rectum AB, quod dicatur q. Applicetur ad axem recta occurrens Parabolæ in C, & D, æqualis b, quæ producatur in E, donec CE ſit æqualis $\frac{bbp}{qq} + \frac{bbn}{qq} + \frac{b^3}{qq}$. Tùm ex D, ducatur DF parallelâ axi, & æqualis $q + \frac{bn}{q} + \frac{bb}{q}$; junctâque EF, & biſectâ in H, erigatur, ex puncto E, recta EG, normalis ad EF, quæ poſsit $\frac{bbdd}{qq}$. Demùm centro H, intervallo HG, deſcribatur circulus occur-



rens à parte E, Parabolæ in I; undè in DF, demittatur normalis IK.

Dico IK eſſe a, ſivè radicem æquationis propoſitæ.

Cadat ex I, in ED, normalis IM; & producatur DE, utrimque ad circumferentiam in P, & S. Nunc IM, dicatur y, & IK, a. Ob Parabolam, rectangulum ex IK, in IK minus DC, æquabitur rectangulo ex AB, in DK, vel IM: hoc eſt in terminis analyticis,

$$aa - ba \parallel qy.$$

Ob circulum verò, rectangulum SMP, æquale eſt rectangulo ex IM, in IM minus DF. Eſt autem rectangulum SMP, æquale duobus rectangulis, SEP (ſivè quadrato EG vel $\frac{bbdd}{qq}$;) & DME, hoc eſt ex conſtructione, $\frac{[illegible]pa + bbna + b^3 a}{qq} + ba - aa$: Rectangulum verò ex IM, ſive y, in IM minus DF, ſivè $y - q \frac{-bn - bb}{q}$, eſt $yy - qy \frac{-bny - bby}{q}$.

Erit

Erit igitur æquatio
$$yy \begin{array}{l} -bny \\ -bb \\ \hline \quad q \end{array} -qy \parallel \begin{array}{l} bbdd + bbpa + ba - aa \\ \qquad\quad +bbn \\ \qquad\quad +b^3 \\ \hline \qquad\quad qq \end{array}$$

Et ablatis æqualibus $-qy$ & $ba - aa$; ac loco yy, & y, poſito eorum valore $\frac{a^4 - 2ba^3 + bbaa}{qq}$, & $\frac{aa - ba}{q}$; redibit ęquatio propoſita,

$$a^4 - 2ba^3 - bnaa - bbpa \parallel bbdd.$$

Si in æquatione defuiſſet $bbdd$: hoc eſt ſi conſtruenda fuiſſet æquatio $a^4 - 2ba^3 - bnaa - bbpa \parallel 0$. Sivè æquatio tertii gradus,

$$a^3 - 2baa - bna \parallel bbp;$$

Cœteris in conſtructione manentibus, defuiſſet tantùm normalis E G, & circulus centro H, intervallo HE, deſcriptus, propoſito ſatisfeciſſet. Si verò defuiſſet $2ba^3$, defuiſſent pariter, tam applicata CD, quàm diameter DF; & radix æquationis, ab interſectione parabolæ circuli in ipſum axem AN normaliter cecidiſſet.

Non exiſtimo autem anxiè explicandam varietatem conſtructionum, ex mutatione ſignorum + & − in æquationibus datis, cùm res facilis ſit, & ſæpè in præcedentibus repetita. Addo tantùm, cùm in hoc exemplo circulus iterùm parabolæ occurrat in V, ex quo ducta eſt in DF, normalis VX; illam eſſe radicem æquationis, $a^4 + 2ba^3 - bnaa + bbpa \parallel bbdd$: ut oſtendit calcùlus. Et ubicumque tandem circulus occurret parabolæ, rectam ex puncto concurſus normalem ad DF, ſi in æquatione adfuerit $2ba^3$; vel ad AN, ſi defuerit, eſſe radicem, ſivè veram, ſivè falſam, æquationis propoſitæ. Sed hæc & plura quæ addi poſſent, Lectoris induſtriæ libens relinquo.

FINIS.

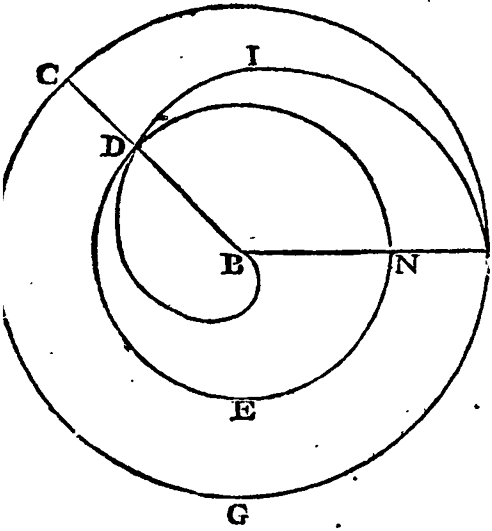
MISCELLANEA

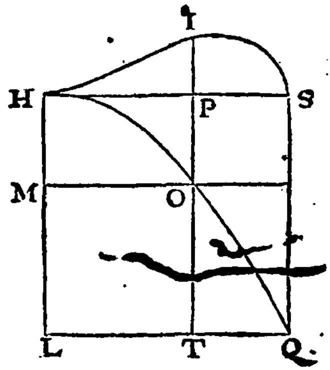
MISCELLANEORUM CAPUT I.

De infinitis Spiralibus, & Spatiorum, ab iis, & radio circuli comprehenſorum, menſurâ.

THEOREMA de Helice, ſeu lineâ ſpirali, in plano deſcribendâ, propoſuit quidem Conon Hamius Geometra; Archimedes autem admirabili quadam aggreſſione demonſtravit: ut inquit Pappus Alexandrinus, Collect. Mathemat. libr. IV. Invenit autem, circulum ad Spatium Spirale primæ circulationis, (de quâ brevitatis causâ nunc tantùm agimus) eſſe triplum. Hos imitati Geometræ recentiores, ac inter illos Vir Clariſſimus & Geometra acutiſſimus P. Stephanus de Angelis Profeſſor Patavinus, cui plurimùm ſemper debebunt hæc ſtudia, ſpiralium doctrinam promoverunt, non eam tantùm conſiderantes, ut Archimedes, in cujus compoſitione motus uterque æquabilis eſt; ſed alias infinitas: in quibus motu, qui fit in radio circuli, æquabili manente, alter in circumferentiâ ſecundùm quemlibet accelerationis gradum variatur. Id mihi occaſionem præbuit, ut ad unicam Analyſim, ſpirales omnes ex quibuſcumque motibus, ſecundùm quemlibet gradum acceleratis, ſivè in radio, ſivè in circumferentiâ, compoſitas, univerſalius revocarem; & ſpatiorum, ab iis, & radio circuli comprehenſorum menſuram, brevi ac facili Regula complecterer, ut ſequitur.

Intelligatur in circulo ACG, cujus centrum B, radius BA: deſcripta ſpiralis hujuſmodi, ut illam ſecante quolibet radio BC, in D, eadem ſemper ſit ratio cujuſlibet datæ poteſtatis totius circumferentiæ





ACGA, ad homogeneam arcus CGA, quæ eſt ejuſdem, vel alterius datæ poteſtatis radii CB; ad homogeneam partis DB: & centro B, intervallo BD, deſcribatur circulus DEND.

Patet primò, circumferentiam ACGA, ad circumferentiam DEND, eſſe perpetuò ut CB, ad DB: & per conſequens totidem circumferentias æquales ipſi ACGA, quot deſcribi poſſunt circumferentiæ DEND, ſimul ſumtas, duplas eſſe omnium circumferentiarum DEND ſimul ſumtarum: hoc eſt ipſius circuli ACGA. Hoc enim indiviſibilium methodo facilè oſtenditur; & vel indè patet, quod ſuperficies cylindri ſuper circulo ACGA, in altitudine CB erecti, ſit dupla ejuſdem circuli.

Deindè evidens eſt, rationem circumferentiæ totius ACGA, ad arcum circuli concentrici DEN, componi ex ratione circumferentiæ ACGA, ad arcum CGA, & ex ratione arcus CGA, ad arcum DEN: quæ ultima ratio eadem eſt ac CB, ad DB.

Nunc in terminis Analyticis circumferentia ACGA, ſit d.

arcus CBA, a.
radius circuli, r.
BD pars ejuſdem, e.

Fiat

Fiat ut circumferentia ACGA, ad arcum DEN, ita r, ad x; erit igitur arcus DEN, $\frac{dx}{r}$. Et cum ratio d, ad $\frac{dx}{r}$, componatur, ut ſupradictum eſt, ex ratione d, ad a, ex ratione r, ad e, ſivè ſit eadem, quæ dr, ad ae; erit ut d, ad $\frac{dx}{r}$, ita dr, ad ae, & dx æquabitur ae, ex quibuſcumque motibus componatur ſpiralis.

Ulterius, exponens poteſtatis, quæ in datâ ſpirali conſideratur in motu per circumferentiam, ſit q; quæ in motu per diametrum, ſit z. Erit igitur, ex hypotheſi, $d^q / a^q / r^z / e^z$.

Et cùm dx, æquetur ae; erit $\frac{dx}{e} \parallel a$. Et $\frac{d^q x^q}{e^q} \parallel a^q$. Igitur pro a^q poſito ejus valore, fiet Analogiſmus,

$$d^q / \frac{d^q x^q}{e^q} / r^z / e^z. \text{ Sivè}$$

$$e^q / x^q / r^z / e^z. \text{ Et æquatio } r^z x^q \parallel e^{q+z}.$$

Quæ quidem æquatio eſt ad unam ex infinitis parabolis, quadrato, cujus latus eſt æquale r, inſcriptam, in quâ ſcilicet exponens dignitatis applicatarum, componitur ex datis exponentibus q, & z, exponens verò dignitatis partium axis, eſt q.

Intelligatur itaque quadratum HLQS, cujus latus ſit æquale AB, ſivè r, & in eo deſcripta ſemiparabola HOQ, vertice H, circa axem HL, cujus talis ſit proprietas, ut applicata qualibet MO, ſit eadem ratio dignitatis LQ, ſumtæ juxta exponentem $q + z$, ad ſibi homogeneam applicatæ MO, quæ eſt dignitatis axis LH juxta exponentem q, ad ſibi homogeneam partis HM. Patet, ſi MO ſupponatur æqualis e, MH fore x, & redituram æquationem $r^z x^q \parallel e^{q+z}$.

Ducatur per O, recta POT, parallela & æqualis HL, erit ut PT, ad PO, ita r, ad x, in terminis analyticis, ſivè circumferentia ACGA, ad arcum DEN ex hypotheſi. Et hoc ſemper fiet ubicumque applicabitur recta MO, æqualis interceptæ DB ad libitum aſſumtæ. Igitur ex methodo indiviſibilium, ut omnes PT, quæ ſunt æquales inter ſe, ad omnes PO, ſivè ut quadratum HLQS, ad trilineum HQS, ita omnes circumferentiæ ACGA (quæ pariter ſunt inter ſe æquales) ad omnes arcus DEN; hoc eſt ita duplum circuli, ut oſtenſum eſt ſupra, ad eundem circulum, demto ſpatio ſpirali BDIA, & radio BA, compre-

52064

henſo. Datur autem ratio quadrati ad trilineum; igitur data quoque eſt ratio dupli circuli ad idem ſpatium.

Ratio verò quadrati ad trilineum, ut ſæpè oſtenſum eſt, eadem eſt, quam habet aggregatum exponentium, tam dignitatis applicatarum, quàm partium axis, ad exponentem dignitatis earundem partium axis; hoc eſt in noſtris terminis $q + z$ unà cum q, ad q, ſivè $2q + z$, ad q. Eadem igitur erit dupli circuli, ad reſiduum ejuſdem demto ſpatio ſpirali. Et ſumtis antecedentium ſubduplis, circulus ad reſiduum, erit ut $q + \frac{1}{2}z$, ad q, ſivè $2q + z$, ad $2q$. Et per conſequens, circulus ad ſpatium ſpirale, erit ut $2q + z$, ad z.

Undè deducitur Regula Univerſalis: **Circulum ad ſpatium quodlibet ſpirale hujuſmodi ſibi inſcriptum, eandem habere rationem, quam habet duplum exponentis dignitatis, quæ conſideratur in circumferentiâ, unà cum exponente dignitatis, quæ ſupponitur in radio, ad eundem hunc exponentem.**

Exempli gratiâ, intelligatur ſpiralis compoſita ex motu accelerato per circumferentiam juxta cubos, per radium juxta quadrata. Erit eadem ratio cubi ACGA, ad cubum CGA quæ eſt quadrati CB, ad quadratum DB. Itaque cum exponens cubi ſit 3, & quadrati 2, erit $q \parallel 3$, & $z \parallel 2$. Ratio igitur circuli ad ſpatium ſpirale, eadem erit ac $6 + 2$, ad 2, ſivè $2q + z$ ad z; hoc eſt 4 ad 1.

Hinc ſolvi poteſt ſequens Problema. **In circulo deſcribere ſpiralem, ex talibus motibus compoſitam, ut circulus, ad ſpatium ſpirale habeat rationem datam numeri ad numerum.**

Detur ratio b, ad d. Nunc cùm ratio circuli, ad ſpatium ſpirale, oſtenſa ſit eadem quæ $2q + z$, ad z; erit dividendo, ut $b - d$, ad d, ita $2q$, ad z: & ſumtis conſequentium duplis, ut $b - d$, ad $2d$, ita $2q$, ad $2z$, vel q, ad z. Undè patet à b, ſive majori numero, auferendum minorem, ut habeatur q, ſivè exponens dignitatis, juxta quam motus procedere

cedere debet in circumferentiâ; & duplicandum minorem, ſivè d, ut habeatur exponens alterius motus in radio.

Ut ſi detur ratio 13, ad 3; q, erit 10, z, 6. Sive ſumtis minimis terminis, q erit 5, z, 3. Hoc eſt, ſi fuerit ſpiralis ita compoſita, ut circumferentiæ ACGA quinta dignitas, ad homogeneam arcus CGA, ſemper eandem habeant rationem, quam habet tertia dignitas radii CB, ad eandem dignitatem partis DB; circulus ad ſpatium ſpirale rationem habebit datam 13 ad 3.

CAPUT II.

De menſurâ infinitorum ſpatiorum curvâ & rectâ contentorum, & eorum centro æquilibrii.

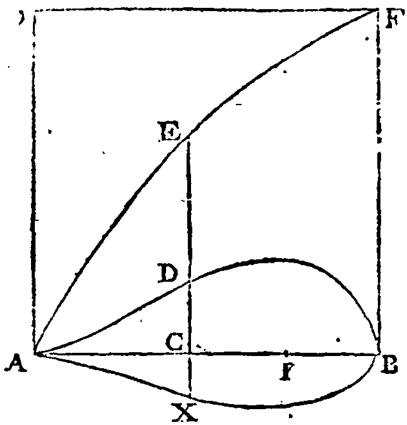
EAdem Analyſi, metiri poſſumus infinitas ſeries infinitorum ſpatiorum curvâ & rectâ contentorum, quæ in hanc deſcriptionem cadunt.

In datâ rectâ AB, ſumto quolibet puncto C, fiat ut quælibet poteſtas totius AB, ad eandem partis AC; ita quælibet alia vel eadem poteſtas partis BC, ad homogeneam applicatæ CD: & ſic ſemper fiat, donec per puncta D, hoc modo inventa deſcribi poſſit curva ADB.

Poſito, ut prius, q, pro exponente poteſtatis aſſumtæ in AB, & AC; & z, pro exponente poteſtatis BC, & CD. Aio quadratum AB, ad ſpatium ADBA, habiturum ſemper rationem compoſitam ex $q+z$, ad z, & ex $q+2z$, ad z; ſivè quam habet $qq+3qz+2zz$, ad zz.

Quod ut oſtendatur nonnulla premittenda ſunt.

Super AB, deſcripta intelligatur recta vel curva AEF, cujus talis ſit proprietas, ut ad illam productâ CD, in E, rectangulum ex AB, in



in C D, ſemper ſit æquale rectangulo B C E, ſit autem ſpatii ipſâ AEF, & duabus rectis AB, B F contenti, centrum æquilibrii, punctum I. Breviter oſtendendum eſt, ſpatium AEFBA, ad ſpatium ADBA, eſſe ſemper in ratione A B, ad B I. Nam omnia rectangula B C E, conſtituunt truncum cylindricum, cujus altitudo eſt AB, baſis A E F B A, planum ſecans autem tranſit per FB. At hic truncus ad cylindricum integrum in eadem baſi & altitudine, eam habet rationem, quam habet I B, ad B A, (hoc enim à celeberrimo Torricellio, & aliis oſtenſum eſt) eſtque idem truncus, æqualis cylindrico, cujus baſis A D B A, altitudo A B; cùm ex hypotheſi, rectangulum ECB, ſemper ſit æquali rectangulo ex AB, in CD; Igitur, ut I B, ad B A, ita cylindricus, cujus baſis A D B A, altitudo A B, ad alium, cujus baſis eſt A E F B A, & eadem altitudo A B: & demtâ communi altitudine A B; ut I B, ad B A, Ita ſpatium A D B A, ad ſpatium A E F B A. Quod erat, &c.

Hoc ſuppoſito, & deſcriptâ, ut propoſitum eſt curvâ A D B, juxta quaslibet poteſtates, quarum exponentes ſint q, & z; in quadrato A F B O, inſcripta pariter intelligatur curva vel recta A E F, quam proximè explicuimus. Erit igitur perpetuò, rectangulum ECB, æquale rectangulo A B, C D. Itaque ut A B, ſivè B F, ad E C, ita C B, ad C D. Facilitatis causâ A B ſivè B F, ſit b. E C, y. C A, a. B C, $b-a$. C D, e. Erit igitur, ut b, ad y, ita $b-a$, ad e.

Et ſumtis earundem linearum dignitatibus juxta exponentem z,

ut b^z, ad y^z, ita $b-a^z$, ad e^z.

Sed, ex compoſitione lineæ A D B, eſt

ut b^q, ad a^q, ita $b-a^z$, ad e^z,

Erit igitur ut b^q, ad a^q, ita b^z, ad y^z. Et æquatio, $a^q \parallel \frac{b^q y^z}{b^z}$;

Si

Si q ponatur major quàm z: vel $\frac{b^{z\,2q}}{b^{q}} \parallel y^{z}$. Si ponatur minor: vel tandem $a^{q} \parallel y^{z}$, ſivè $a \parallel y$, ſi q & z ſupponantur æquales.

Trium autem illarum æquationum, duæ primę ſunt ad aliquam ex infinitis parabolis, tertia ad lineam rectam, ut patet: Datur igitur dimenſio ſpatii A E F B A.

Eſt autem notandum in æquatione $a^{q} \parallel \frac{b^{q}y^{z}}{b^{z}}$, ſemiparabolam AEF, habere verticem A, axem AO: in æquatione verò $\frac{a^{q}b^{z}}{b^{q}} \parallel y^{z}$, eodem vertice, habere axem AB. Sed quocumque tandem ſitu inveniatur, erit ſpatium A E F B A, unà ſemiparabolarum, vel ejus reſiduum ad quadratum.

Supponimus autem, ut ab aliis demonſtratum, quod, ſive idem ſpatium ſit ſemiparabola, ſivè ejus reſiduum ad quadratum, eadem ſit ratio quadrati A B F O, ad ſpatium A E F B, quæ eſt exponentis poteſtatis E C, ſivè y, unà cum exponente poteſtatis A C, ſivè a; ad exponentem ejuſdem poteſtatis EC, ſivè y, hoc eſt in terminis analyticis, quæ eſt $q + z$, ad z.

Ita verò eſſe A I ad I B; ſivè, ſi I B dicatur v, ita eſſe $b - v$, ad v, ut quadratum, ad dictum ſpatium, hoc eſt rurſus, ut $q + z$ ad z.

Itaque ut $b - v$ ad v, ita $q + z$, ad z, & componendo ut b, ad v, ita $q + 2z$, ad z.

Demonſtratum eſt autem ſuperius eſſe ut b, ad v, ſivè AB, ad BI, ita ſpatium A E F B A, ad ſpatium A D B A: erit igitur ſpatium illud, ad hoc, ut $q + 2z$, ad z.

Nunc, ratio quadrati A B F O, ad ſpatium A D B A, componitur ex ratione ejuſdem quadrati, ad ſpatium A E F B A; & ex ratione hujus ſpatii, ad ſpatium A D B A: prima autem ratio inventa eſt eadem, quæ $q + z$ ad z; ſecunda verò, quæ $q + 2z$ ad z, quæ componunt rationem, $qq + 3qz + 2zz$, ad zz. Igitur quadratum A B F O, ad ſpatium A D B A, eſt in eadem ratione $qq + 3qz + 2zz$, ad zz. Quod erat, &c.

Si æquales ſupponerentur q, & z, curva A D B eſſet parabola ſimplex, cujus applicata eſſet AB; & A E B, diameter quadrati, tangens parabolæ, ut patet.

Centra æquilibrii ſpatiorum ſic deſcriptorum reperiri poſſunt

O Analyſi

Analyſi deductâ ex iiſdem principiis.

Ponatur enim I eſſe centrum æquilibrii ſpatii A D B A, & fiat perpetuò ut BA, ad AC, ita CD, ad CX, ipſi indirectum; donec per puncta X, hoc modo inventa, deſcribi poſſit alia curva AXB.

Quoniam rectangulum ACD, ſemper æquale eſt rectangulo ex A B, in CX; ſpatium ad ADBA, ad ſpatium AXBA, erit, ex ſuprà oſtenſis, ut BA, ad AI. Itaque ſi detur ratio ſpatiorum, dabitur A I. Denominatis ut prius, AB, b. CD, e. AC, a. CB, $b-a$. CX ſit y.

Erit itaque $by \parallel ae$ & $\frac{by}{a} \parallel e$.

Nunc in compoſitione curvæ ADB, eſt ut b^q, ad a^q, ita $b-a^z$, ad e^z. Cùm verò e ſit $\frac{by}{a}$, erit $e^z \parallel \frac{b^z y^z}{a^z}$. Itaque loco e^z, poſito ejus valore, erit ut b^q, ad a^q, ita $b-a^z$ ad $\frac{b^z y^z}{a^z}$ ſivè, ſublatâ fractione, ut b^q, ad a^q, ita $b-a^z$ in a^z, ad $b^z y^z$. Et cum multiplicatio poteſtatum ejuſdem lineæ vel quantitatis, fiat additione exponentium (ut notum eſt) productum ex b^{q+z}, in y^z, æquale erit producto ex a^{q+z}, in $b-a^z$. Erit igitur

ut b^{q+z}, ad a^{q+z}, ita $b-a^z$, ad y^z

Sivè ut poteſtas AB cujus exponens $q+z$, ad poteſtatem homogeneam ipſius AC, ita poteſtas BC, cujus exponens z, ad homogeneam applicatæ CX. Itaque curva AXB eſt una etiam ex infinitis illis ſuprà deſcriptis; hoc habens commune cum curvâ ADB, quod poteſtates quæ pro ejus compoſitione ſumuntur in CB, & CX, ſint eædem, quæ in compoſitione alterius aſſumtæ ſunt pro CB, & CD: cùm in analogiſmo curvæ ABD habeat $b-a^z / e^z$; in hujus verò $b-a^z / y^z$. Differunt autem poteſtate BA, & AC, quæ in priori habet exponentem q, in poſteriori verò $q+z$; hoc eſt aggregatum exponentium utriuſque poteſtatis in priori aſſumtæ.

Patet igitur dari menſuram ſpatii A X B A, & per conſequens rationem ſpatii ADBA ad illud; ſivè rationem BA ad AI.

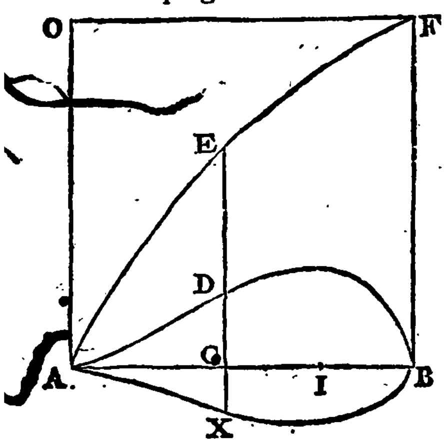
Nam ex regulâ ſuprà traditâ quadratum A B, ſivè bb, ad ſpatium ADBA, habet rationem compoſitam ex ratione $q+z$, ad z, & ex ratione $q+2z$ ad z; ſivè eſt ut $qq+3qz+2zz$ ad zz.

Similiter igitur idem quadratum bb, ad ſpatium AXBA, habebit rationem compoſitam ex ratione $q+2z$, ad z, (cùm $q+z$ in hac, ſit

loco

loco q in aliâ, ut dictum eſt) & $q + 3z$, ad z; quæ duæ rationes componunt rationem $qq + 5qz + 6zz$, ad zz. Igitur cum utrimque ſint iidem termini extremi bb, & zz, erit reciprocè ut ſpatium ADBA, ad ſpatium AXBA, ita $qq + 5qz + 6zz$, ad $qq + 3qz + 2zz$, ſivè applicatione factâ ad $q + 2z$, ita $q + 3z$ ad $q + z$. Cùm autem ita etiam ſit BA, ad AI, erit dividendo BI, ad IA, ut $2z$, ad $q + z$.

Sit, exempli gratiâ, ut cubus BA, ad cubum AC, ita quadratum BC ad quadratum CD. Evidens eſt, q, in hoc caſu, eſſe 3. z, 2. Itaque cùm ratio quadrati ad ſpatium, ſit ut $qq + 3qz + 2zz$, ad zz: erit eadem quæ $9 + 18 + 8$, ſivè 35, ad 4.



Pro centro æquilibrii; cùm $q + z$, ſit 5; $2z$, 4; AI, ad IB, habeat rationem 5, ad 4; erit I centrum quæſitum.

Aliis etiam modis conſiderari poſſunt infinita ſpatia; nimirùm ita componendo curvam ADB, ut applicatâ ad libitum DC; productum ex qualibet poteſtate AB minus eadem poteſtate AC, in eandem vel aliam quamlibet poteſtatem ipſius AC; ſemper ſit æquale homogeneo comparationis facto ex applicatâ CD, in poteſtatem AB.

Exempli gratiâ ſi denominatis, ut prius, lineis; $bb - aa$ in a^3, æquetur e, in b^4. Vel $b - a$, in aa, ſit æquale e, in bb.

Facilis eſt enim ſpatiorum illorum menſura, cum in omni caſu & varietate compoſitionis, ſemper ſit æqualis differentiæ duarum ex infinitis ſemiparabolis, vertice O, axe OA, quadrato ABFO inſcriptarum: vel ſaltem differentiæ unius ex iiſdem, & trianguli OAB. Ad quam differentiam, ſpatia primò loco deſcripta pariter reduci poſſunt ſed longiore circuitu: in his verò ſtatim ſeſe offerunt parabolæ, quarum differentiam quærimus.

Exemplo ſit $bba^3 - a^5 \| b^4e$. Fiat una ſemiparabolarum, cujus æquatio ſit $a^5 \| b^4y$, alia verò cujus æquatio ſit $a^3 \| bby + bbe$. Et ad illas producta intelligatur CD, cujus pars inter utramq; intercepta,

dicatur e, pars ulterior uſque ad OF, dicatur y; & à punctis interſectionum, applicentur duæ parallelæ, & æquales AC, ſivè a. Patet parabolæ exterioris fore æquationem, quam propoſuimus, $a^5 \parallel b^4 y$. Et interioris, $a^3 \parallel bby + bbe$. Quod verò pars intercepta, ſit æqualis CD, evidens eſt multiplicando ultimam æquationem per bb, ut ad eundem cum priore gradum attollatur. Fiet enim $bba^3 \parallel b^4 y + b^4 e$: & ab hac auferendo priorem remanebit æquatio $bba^3 - a^5 \parallel b^4 e$, quam in curvâ ABD ſuppoſuimus.

Regula verò breviſſima pro dimenſione horum ſpatiorum eſt hæc:

Ut factum ab exponentibus poteſtatum ipſius a unitate auctis, ad eorum exponentium differentiam, ita quadratum ABFO, ad ſpatium ADBA.

In allato exemplo, exponentes ipſius a, ſunt 3, & 5; ſi unitate augeantur, erunt 4, & 6.; productum eorundem 24, differentia 2; igitur ut 24, ad 2, ſivè 12, ad 1, ita quadratum, ad ſpatium.

Ratio Regulæ hæc eſt. Spatium ADBA eſt æquale differentiæ ſemiparabolarum, ut dictum eſt; dantur autem dignitates applicatarum, quæ ſunt inter ſe ut partes axis: ſit itaque exponens dignitatis in exteriori parabola q, in interiori z, unitas d, reſiduum ſemiparabolæ exterioris, ipſa demta à quadrato, ſit vv, reſiduum interioris $vv + xx$; igitur differentia erit xx.

Nunc, notum eſt ex dimenſione harum parabolarum, ita eſſe in exteriori, ut $q + d$, ad d, ita bb ad vv. In alia verò, ut $z + d$, ad d, ita bb, ad $vv + xx$. Erit igitur reciprocè, ut $q + d$, ad $z + d$, ita $vv + xx$, ad vv: & dividendo ut $q - z$, ad $z + d$, ita xx, ad vv. Eſt autem vv, æquale $\frac{bbd}{q+d}$; itaque loco vv, ſubſtituto ejus valore, & multiplicatis extremis ac mediis, fiet æquatio $zxx + dxx \parallel \frac{qbbd - zbbd}{q+d}$ ſivè ſublatâ fractione, $qzxx + qdxx + zdxx + ddxx \parallel qbbd - zbbd$, Erit igitur ut $qz + qd + zd + dd$, ad $qd - zd$, ita bb, ad xx. Eſt autem $qz + qd + zd + dd$, productum ex $q + d$, in $z + d$; ſivè factum ab exponentibus dignitatum unitate auctis, cùm d ſit unitas; & ob eandem rationem, $qd - zd$, idem eſt ac $q - z$, differentia, ſcilicet

eorumdem

eorundem exponentium: patet itaque veritas Regulæ.

Evidens eſt, hanc demonſtrationem comprehendere modum inveniendi differentiam duarum quarumcumque ſemiparabolarum, quadrato circa eundem axem & eodem vertice inſcriptarum, ſivè dignitates applicatarum ſint inter ſe ut partes axis (quemadmodum in caſu noſtro) ſivè ut partium axis quælibet dignitates, dummodò eædem in utrâque parabolâ aſſumantur. Nam ſi d exponentē partium axis ſignificet, ſemper vera erit regula, dummodò in terminis analyticis exprimatur: nimirùm ut $qz + qd + zd + dd$, ad $qd - zd$, ita bb, ad xx: Exempli gratiâ, ſi in interiori parabolarum fuerit ut quadrata partium axis, ita cubi applicatarum; in aliâ verò ut eadem quadrata, ita dignitates quintæ applicatarum: tunc d, erit 2. q, 5. z, 3. Itaque ratio quadrati, ad differentiam, erit eadem quæ $q + d$, in $z + d$, ſivè 7 in 5, hoc eſt 35, ad $q - z$ in d, hoc eſt 2 in 2, ſivè 4.

Vndè patet modus inveniendi menſuram infinitorum aliorum ſpatiorum, ſumendo nimirùm, non ſemiparabolas in quibus dignitates applicatarum ſunt inter ſe ut partes axis, prout à nobis factum eſt, ſed ut quælibet partium axis dignitates. Quæ tamen fuſius proſequi longioris eſſet operæ: ſufficit modum quo id fieri poſſit obiter indicaſſe.

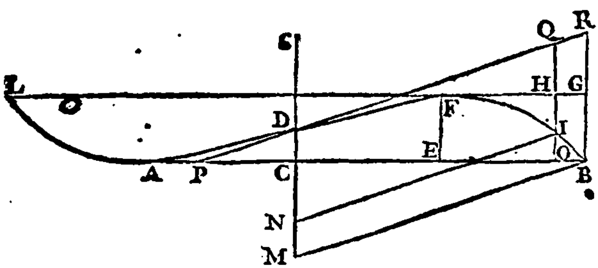
Æquilibrii centrum ſic determinabimus in his ſpatiis. Sit illud I, & producatur ut prius CD, in X, donec rectangulum AB, CX, ſit æquale rectangulo ACD: & hoc ſemper fiat, uſque dum abſoluta ſit curva ACX. Erit igitur rurſus ſpatium ADBA, ad ſpatium AXBA, ut BA ad AI.

CX ſit y; fiet itaque by, ſemper æquale ae, & $\frac{by}{a} \parallel e$. Et ſi in qualibet æquatione datâ ad curvam ADB, loco e ſubſtituatur ejus valor; patet nihil in illâ mutatum iri; præter exponentes dignitatum a, qui unitate augebuntur: uti & poteſtas b in homogeneo comparationis, e verſâ in y. Exempli gratiâ, ſi æquatio curvæ ADB fuerit $bbaa - a^4 \parallel b^3 e$: erit æquatio curvæ AXB, $bba^3 - a^5 \parallel b^4 y$. Igitur curva AXB, ſub eandem deſcriptionem cadit cum priore, ejuſque dimenſio habetur ex Regulâ. Datur itaque ratio prioris ſpatii ad hoc; ſivè ratio BA, ad AI. Cùm verò ex Regulâ, quadratum AB, ad ſpatium ADBA, ſit ut factum ab exponentibus dignitatum a unitate auctis, ad eorundem differentiam: patet idem quadratum, ad ſpatium AXBA, eandem habiturum rationem, quam habet factum ex iiſdem exponentibus bina-

rio auctis, ad eorundem differentiam. Et per conſequens, centrum æquilibrii haberi, ſi fiat ut productum ab exponentibus dignitatum a binario auctis, ad productum ab iiſdem exponentibus auctis unitate tantùm, ita BA, ad AI.

In exemplo, æquatio curvæ ADB erat, $bbaa - a^4 \parallel b^3 e$, dignitatum a exponentes ſunt 2 & 4. Si unitate augeantur, erunt 3, & 5; productum ab iiſdem 15. Si binario, erunt 4, & 6; productum 24. Erit igitur BA, ad AI, ut 24, ad 15, ſivè 8, ad 5, BI, ad IA, ut 3, ad 5.

Curvarum, quas præcedentibus deſcriptionibus complexi ſumus, multæ ſunt proprietates, & in ſingulis diverſæ. Vt oſtendit calculus. Unam afferam in exemplum.



Proponatur curva ADB, in quâ ſumto quolibet puncto D; & applicatâ normali DC, ita ſemper ut quadratum BA ad quadratum AC, ut BC, ad CD. Sit AC tertia pars ipſius AB, & in eâ ſumatur CP, tripla CD; junctâque PD, ducatur eidem parallela BM, occurrens DC productæ in M. Tum ſumto in curvâ DB, quolibet puncto I, ducatur IN parallela BM, occurrens CM, in N. Dico eſſe ut MD, ad ND, ita cubum MB, ad cubum NI: ſivè curvam DIB, eſſe parabolam cubicam, cujus diameter DM, vertex D, applicatæ BM IN.

Cadat ex I normalis IO. erit igitur ex proprietate curvæ ADB, ut BO, ad OI, ita quadratum BA, ad quadratum AO.

Sit BA, b. OI, e. CO, a. Erit AO $\frac{1}{3}b + a$. BO $\frac{2}{3}b - a$. Itaque ut $\frac{2}{3}b - a$, ad e, ita bb, ad $\frac{1}{9}bb + aa + \frac{2}{3}ba$. & æquatio $bbe \parallel \frac{2}{27}b^3 + \frac{1}{3}bba - a^3$.

Quoniam autem AC eſt $\frac{1}{3}b$, erit rurſus, ex proprietate curvæ ACD, ut bb, ſivè quadratum AB, ad $\frac{1}{9}bb$, ſivè quadratum AC, ita BC, ſivè $\frac{2}{3}b$, ad CD. Erit igitur CD $\parallel \frac{2}{27}b$. Et ſi erigatur in B, normalis BR, occurrens PD productæ in R: cùm DC ſit ſubtripla CP, erit BR (ſivè

eidem

eidem æqualis MD, ob parallelas) ſubtripla PB. Eſt autem PB, compoſita ex BC $\frac{2}{3}b$, & CP tripla DC, ſivè $\frac{2}{9}b$: erit itaque BR $\frac{8}{27}b$. Eſt autem cubus CB, $\frac{8}{27}b^3$. Igitur quadratum AB, ſivè bb, in BR, ſivè $\frac{8}{27}b$ æquabitur cubo CB.

Nunc producatur OI, uſqve dum occurrat PR, in Q. Erit QO pariter ſubtripla OP, & æqualis $\frac{2}{27}b + \frac{1}{3}a$, & ſi QI, dicatur y, QO, ſivè $\frac{2}{27}b + \frac{1}{3}a$, æquabitur $y + e$, & e, erit $\frac{2}{27}b + \frac{1}{3}a - y$.

Igitur in ſuperiori æquatione $bb \parallel \frac{2}{27}b^3 + \frac{1}{3}bba - a^3$, pro e poſito ejus valore fiet $\frac{2}{72}b^3 + \frac{1}{3}bba - bby \parallel \frac{2}{27}b^3 + \frac{1}{3}bba - a^3$; hoc eſt, factâ metatheſi & ablatis æqualibus, $bby \parallel a^3$.

Solidum itaque ex quadrato AB in QI, æquabitur quadrato OC. Habuimus autem cubum BC, æqualem ſolido ex quadrato AB in BR: erit igitur ut cubus CB, ad cubum OC, ita ſolidum ex quadrato AB in BR, ad ſolidum ex eodem quadrato in IQ, ſivè ita BR ad IQ, hoc eſt MD, ad DN. Eſt autem ut cubus BC ad cubum OC, ita cubus BM, ad cubum IN. (ob parallelas) Erit igitur ut MD, ad DN. ita cubus MB, ad cubum NI. Quod erat, &c.

Non abſimili modo oſtendetur, productâ CD verſus S, curvam DA, pariter eſſe parabolam cubicam, cujus vertex D, diameter DS, imò curvam DA, eandem eſſe cum curvâ DF inversâ. Et ſi ſumtâ BE, tertiâ parte AB applicetur EF, & per F, ducatur recta FL, parallela AB; deindè continuetur curva DA, prout exigit proprietas parabolæ cubicæ, cujus pars eſt DA, occurret illa rectę GL, in L, ita ut FL, ſit æqualis AB, & curva LAF, æqualis & ſimilis curvæ AFB ſed inversè poſita. Et in ſummâ patebit ex calculo, curvas DAL, & DFB, eſſe duas parabolas cubicas omninò æquales, eodem vertice D, circa diametrum communem MDS, & utramque tangi in vertice à rectâ PDR.

Dico ulterius, ſumto in FB quolibet puncto I, & applicata OI, cui productæ occurrat LF, in H, uti & rectæ BR, in G; eſſe vt GB, ad HI, ita ſolidum ex LG in quadratum GF, ad ſolidum ex LH in quadratum HF.

Nam cùm BE ſit pars tertia AB, ſivè $\frac{1}{3}b$, erit EF, ex proprietate curvæ $\frac{4}{27}b$. Et quadratum AB, ad quadratum BE, ut 9 ad 1. Similiter GL, eſt $\frac{4}{3}b$, GB verò æqualis EF, $\frac{4}{27}b$: itaque LG, ad GB, babebit etiam rationem 9, ad 1. Igitur ut LG, ad GB, ita quadratum AB,

ad

ad quadratum BE, ſivè GF, & ſolidum ex LB, in quadratum GF, æquabitur ſolido ex GB, in quadratum AB.

Nunc, OI ſit e, EO, v. AO, erit $\frac{2}{3}b+v$, & BO, $\frac{1}{3}b-v$; & ex proprietate curvæ AFB, fiet æquatio $\frac{4}{27}b^3-bvv-v^3 \parallel bbe$. HI dicatur y, erit OI, ſivè $e \parallel \frac{4}{27}b-y$. Subſtituatur in proximâ æquatione loco e, ejus valor, fiet $\frac{4}{27}b^3-bvv-v^3 \parallel \frac{4}{27}b^3-bby$ ſivè ablatis æqualibus, & mutatis ſignis $bvv+v^3 \parallel bby$. Hoc eſt, ſolidum ex $b+v$, ſivè LH, in quadratum FH, ſivè vv, æquabitur ſolido, ex quadrato AB, in HI. Cùm autem ſuprà oſtenſum ſit, ſolidum ex eodem quadrato AB, in GB, æquari ſolido ex LG in quadratum GB; patet ita eſſe GB, ad HI, ut ſolidum ex LG in quadratum GF, ad ſolidum ex LH in quadratum HF. Quod erat, &c.

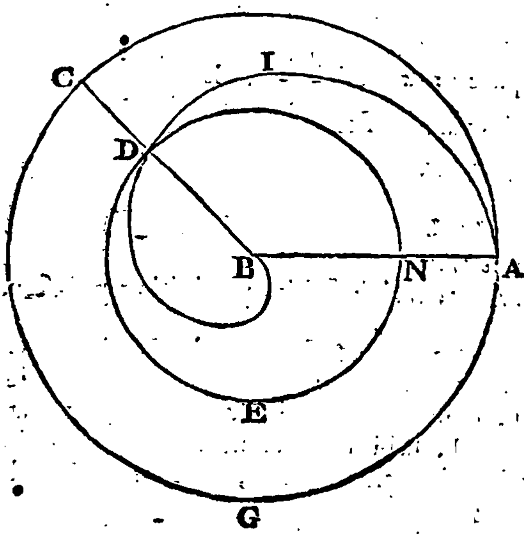
Ex quibus evidens eſt curvam FIB, ſi ejus puncta referri intelligantur ad rectam EB, eſſe Ellipſoidem (ſi ita vocare liceat; ſi ad rectam DM eſſe Paraboloidem; ſi verò ad rectam LG eſſe Hyperboloidem. Quid verò in aliis curvis contingat, facilè ſciri poterit inveſtigando prius maximam applicatarum, qualis eſt hic EF; punctum flexus contrarii (ſi in contrarium flectatur) ut hic D; & tangentes, quales ſunt FG, PD: his enim inventis eodem fermè calculo, quem ſuprà adhibuimus, reliqua expediri poterunt.

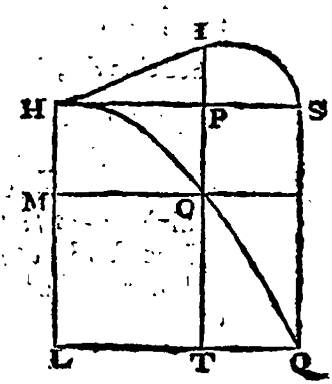
CAPUT III.

De aliis Spiralibus infinitis, & ſpatiorum ab iis, & radio circuli comprehenſorum, dimenſione.

REpetito Schemate Capitis primi, ſi Spiralis nunc intelligatur ita compoſita, non, quemadmodum priùs, ut ſit eadem ratio dignitatis cujuſlibet, totius circumferentiæ ACGA, ad eandem, arcus CGA, quæ eſt dignitatis CB, ad eandem BD; ſed è contrà, ut dignitas quælibet totius circumferentiæ ACGA,

ſe





ſe habeat ad eandem dignitatem arcus AC, ut alia vel eadem dignitas radii CB, ad homogeneam partis CD: poterit etiam unicâ Analyſi & regulâ ſpatiorum ſpiralium ADBA dimenſio determinari.

Integra circumferentia ACGA, vocetur, ut prius, d.
arcus AC, a.
radius, r.
pars ejuſdem CD, e.
Igitur BD, erit $r - e$.

Fiat nunc ut integra circumferentia, ſivè d, ad arcum ND, ita r, ad x; erit arcus ND $\parallel \frac{dx}{r}$. Cùm verò ratio totius circumferentiæ ACGA, ad arcum ND, componatur ex ratione ejuſdem circumferentiæ ad arcum AC, ſivè d, ad a, & ex ratione arcus AC, ad arcum ND, ſivè CB, ad DB, hoc eſt r, ad $r - e$; duæ autem illæ rationes, componant rationem dr, ad $ra - ae$: erit ut d, ad $\frac{dx}{r}$, ita dr, ad $ra - ae$ & $ra - ae$ æquabitur dx, quæcumque tandem poteſtates ſupponantur in circumferentiâ, & in radio. Sit nunc, ut prius, expo-

 nens

nens poteſtatis in circumferentiâ q; in radio z. Erit igitur ex hypotheſi, $d^q / a^q / r^z / e^z$.

Sed cùm dx, ſit æquale $ra - ae$, erit $\frac{dx}{r-e} \| a$. Et $\frac{d^q x^q}{r-e^q} \| a^q$.

Itaque pro a, poſito ejus valore, fiet

$$d^q / \frac{d^q x^q}{r-e^q} / r^z / e^z.$$

Sivè $r-e^q / x^q / v^z / e^z$

Hoc eſt $r^z / e^z / r-e^q / x^q$.

Igitur x, eſt ad unam ex curvis infinitis, quas initio capitis ſecundi deſcripſimus.

Sit SH, æqualis r; HP æqualis e; & fiat ut SH^z ad HP^z ſivè r^z, ad e^z, ita SP^q, ſivè $r-e^q$ ad PI^q. PI, erit x, ut patet. Et ulterius evidens eſt, ſi hoc ſemper fiat, donec deſcribi poſſis curva HIS; quadratum HSQL, ad ſpatium HISH, habiturum rationem datam, nimirùm ex regulâ poſitâ in principio capitis ſecundi, eandem quam habet, $qq + 3qz + 2zz$, ad zz.

Sed cùm eadem ſit perpetuò ratio totius circumferentiæ ACGA, ad arcum ND, quæ eſt r, ad x, ex hypotheſi; patet omnes circumferentias ſimul ſumptas, ſivè duplum circuli ACGA, ad omnes arcus ND, ſivè ſpatium ſpirale, eandem rationem habere, quam omnes r, ſivè quadratum HSQL, ad omnes x, ſivè PI, hoc eſt ad ſpatium HISH. Duplum igitur circuli, ad idem ſpatium, eſt in ratione $qq + 3qz + 2zz$, ad zz; & circulus ad illud, ut $qq + 3qz + 2zz$, ad $2zz$.

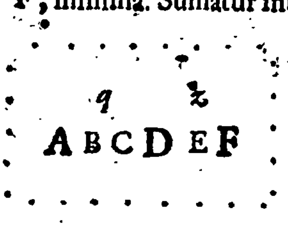
CAPUT IV.

De maximis & minimis.

NOtum eſt in ſerie trium Arithmetice proportionalium, maximam, ad mediam, minorem habere rationem, quam habeat media, ad minimam; ideòque quadratum mediæ, majus eſſe facto ſub extremis: ſed non æquè nota eſt, ut exiſtimo, propoſitio

propoſitio univerſalis, quæ ſequitur. **Si fuerint quotlibet magnitudines in continuâ proportione Arithmeticâ; minor erit ratio dignitatis Maximæ, ad eandem dignitatem cujuſlibet intermediæ, cujus dignitatis exponens ſit numerus æqualium exceſſuum intermediæ ſupra minimam: quam dignitatis ejuſdem intermediæ, ad eandem dignitatem minimæ, cujus exponens ſit numerus exceſſuum maximæ ſupra intermediam.**

Propoſitionem ſic explico, & oſtendo. Sint quotlibet in continuâ proportione Arithmetica A, B, C, D, E, F; ſitque A, maxima, F, minima. Sumatur intermedia quælibet D, & numerus exceſſuum æqualium D, ſuprà F, ſit *z*: numerus verò eorundem exceſſuum A, ſuprà D, ſit *q*. Dico dignitatem A, cujus exponens ſit numerus *z*, ad dignitatem D, cujus exponens ſit idem numerus, minorem habere rationem, quam habeat dignitas D, cujus exponens ſit numerus *q*, ad eandem dignitatem ipſius F.



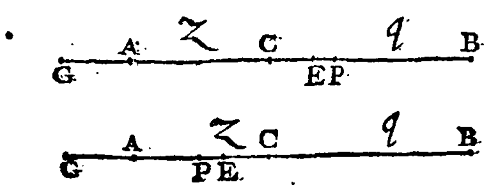
Nam cùm C, ad D, majorem rationem habeat, quàm B, ad C; & B ad C, quàm A, ad B; & ſic ſemper quotcumque fuerint: evidens eſt, ſi tot Geometricè proportionales ponerentur in ratione continuâ D, ad C, quot ſunt Arithmeticè, maximam, quæ reſponderet ipſi A, fore majorem A. Eſt autem ut hæc maxima Geometricè propotionalium ad D, ita C^q, ad D^q: cùm *q*, ſit numerus exceſſuum, ex hypotheſi, & in progreſſione Geometricâ, ſit ſemper ut prima ad ultimam, ita dignitas cujuſlibet ex progreſſione cujus exponens ſit numerus exceſſuum; ad dignitatem eandem immediatè ſequentis. Igitur cùm maxima Geometrica, major ſit maximâ Arithmeticâ: minor erit ratio maximæ Arithmeticæ, ſivè A, ad D, quàm C^q, ad D^q. Sed tres ECD, ſunt etiam Arithmeticè proportionales, idcòque major adhuc eſt ratio D, ad E, quàm C, ad D; & D^q, ad E^q, quàm C^q, ad D^q.

Itaque multò minor erit ratio A, ad D, quàm D^q ad E^q.

Eodem argumento, ſi in ratione D, ad E, ponantur tot continuè Geometricè proportionales, quot ſunt Arithmeticæ; patet ultimam, quæ reſponderet F, fore majorem ipsâ F; quandoquidem ratio D, ad E, minor ſit ratione E, ad F; & ſic ſemper. Igitur cùm z ſit numerus exceſſuum; major erit D, ad F, quàm D^z, ad E^z; & per conſequens, minor erit ratio D^z, ad E^z, quàm D ad F.

Nunc, cùm ratio A, ad D, oſtenſa ſit minor ratione D^q, ad E^q; erit ſumta communi dignitate, cujus exponens z; ratio A^z, ad D^z, minor ratione D^{q+z}, ad E^{q+z}. Similiter cùm ratio D^z, ad E^z, oſtenſa ſit minor, quàm ratio D, ad F; ſumtâ communi dignitate, cujus exponens q; erit etiam ratio D^{z+q}, ad E^{z+q}, minor ratione D^q, ad F^q. Sed ratio A^z, ad D^z, oſtenſa eſt minor ratione D^{q+z}, ad E^{q+z}. Igitur multò minor erit, quàm ratio D^q, ad F^q. Quod erat, &c.

Ex hâc propoſitione facilè demonſtratur ſequens. **Si magnitudo quælibet dividatur in ratione numeri ad numerum; productum ex dignitatibus partium, quarum exponentes ſint iidem numeri, erit omnium ſimilium maximum.**



Secetur AB, in C, ita ut AC, ad CB habeat rationem numeri z, ad numerum q. Dico productum ex dignitate AC, cujus exponens ſit z, in dignitatem CB, cujus exponens ſit q, eſſe omnium ſimilium maximum: hoc eſt ſi AB, ſecetur in alio quolibet puncto; ut E, productum ex AE^z, in EB^q, minus fore producto ex AC^z, in CB^q. Diviſa intelligatur CE, in tot partes æquales, quot unitates continet numerus z; & fiat ut AC, ad CB, ita CE, ad CP. Igitur CP, continebit etiam tot partes æquales, quot unitates continet numerus q. In CA producta, ſi opus

opus ſit, ſumatur CG, æqualis CB: erit ita ut PC; ad CE, ita GC, ad CA; & permutando, ac componendo, ut PG, ad GC, ita EA, ad AC.

Nunc quoniam CE continet tot partes æquales, quot ſunt unitates in z, & CP, quot ſunt in q; habemus ſeriem arithmeticè continuè proportionalium, quarum maxima eſt PG, minima EB, intermedia CB, vel CG. Eſt autem exceſſuum æqualium intermediæ ſuprà minimam, numerus, z: Maximæ verò ſuprà intermediam, numerus q, ex conſtructione: Igitur minor eſt ratio PG^z, ad CG^z, vel CB^z, quàm CB^q, ad EB^q, ex præcedenti propoſitione. Sed ut PG, ad CG, ita oſtenſum eſt eſſe EA, ad AC; & ut PG^z, ad CG^z, ita EA^z ad AC^z. Igitur minor erit ratio EA^z, ad AC^z, quàm ſit CB^q, ad EB^q, & per conſequens productum ex EA^z, in EB^q, minus erit producto ex AC^z, in CB^q. Quod erat &c.

Eadem omninò eſt demonſtratio ſi E ſumatur inter A, & C; niſi quod eo caſu, maxima Arithmeticè proportionalium ſit BE, minima GP; eadem verò intermedia CB, vel CG; ut patebit conſideranti.

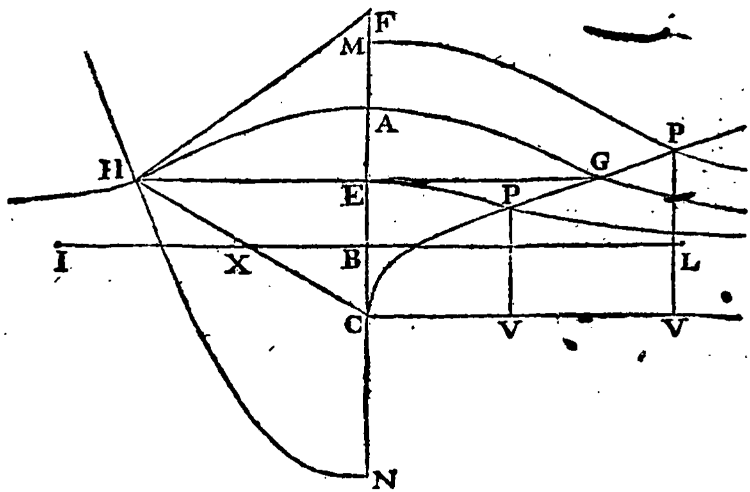
Liceret hujus Propoſitionis uſum prolixius extendere, ad determinandas nempè maximas & minimas applicatarum in curvis, tangentes & ſimilia. Verùm cùm hanc materiam nuper, in Exercitatione ſua Geometrica, feliciter aggreſſus ſit Vir clariſſimus Michael Angelus Riccius, doctrinâ & humanitate ſingulari, orbi literato notiſſimus; & juſti operis ſpem faciat: fruſtrà nunc pluribus inſiſterem, cùm meliora ac perfectiora ab ipſo propediem expectari debeant.

CAPUT V.

De puncto flexus contrarii, in Conchoide Nicomedis primâ.

A Determinatione maximæ vel minimæ, ſivè τȣ μοναχȣ, ut vocat Pappus, pendet etiam inventio puncti flexus, in iis curvis, quæ in partes contrarias flectuntur. Exempli gratiâ, in

in Conchoide Nicomedis primâ; cujus polus C, Aſymptotos, ſivè Regula, IBL, axis CBA, & ex puncto quolibet ſumto in curvâ ut H, applicata ad axem HE; ut habeatur in eodem puncto H, tangens occurrens axi, ſi opus fuerit, producto in F; CB dicatur b. BA, z. BE, y. Erit perpetuò $\frac{bzzy - by^3 + zzyy - y^4}{bzz + y^3}$ æqualis EF.



Itaque ſi b, z, y, datæ ſupponantur, non ignorabitur EF.

Similiter pro BF, habebimus $\frac{bzzy - by^3 + zzyy - y^4}{bzz + y^3} + y$, ſivè $\frac{2bzzy - by^3 + zzyy}{bzz + y^3}$.

Quoniam verò, ſi y ignorari ſupponatur, & BF data eſſe; æquatio erit amphibola (nam ſi BF, dicatur d, erit $2bzzy - by^3 + zzyy \parallel bzzd + y^3d$, hoc eſt $\frac{2bzzy + zzyy}{b + d} - y^3 \parallel \frac{bzzd}{b + d}$) palam eſt longitudinem ipſius BF, nullo caſu eſſe infinitam, ſed terminum habere longitudinis, ex quo unica tangens ad curvam duci poterit; cùm æquationes amphibolæ in puncto maximæ, unicam ſolutionem habeant, in aliis plures; ut notum eſt.

Eſt

Eſt autem ille terminus, ex quo ducitur tangens ad punctum flexus; quem ſic invenire licet.

Fractionis quæ æquivalet rectæ BF, ſivè $\frac{2bzzy - by^3 + zzyy}{bzz + y^3}$, determinatio eſt $\frac{2bzz - 3byy + 2zyy}{3yy}$: Hæc itaque fractio in puncto maximæ æquabitur BF, & per conſequens, $\frac{2bzz - 3byy + 2zzy}{3yy} - y$, æquabitur EF.

Habuimus autem ſuprà, in qualibet tangente, eandem EF, æqualem $\frac{bzzy - by^3 + zzyy - y^4}{bzz + y^3}$. Erit igitur æquatio in puncto maximæ,

$$\frac{2bzz - 3byy + 2zzy}{3yy} - y \parallel \frac{bzzy - by^3 + zzyy - y^4}{bzz + y^3}$$

& ſublatâ fractione per multiplicationem, demtiſque æqualibus, ac reſiduo applicato ad zz, fiet $2bbzz + 2bzzy \parallel 3bbyy + 4by^3 + y^4$. Cujus æquationis conſtructione invenitur y, ſivè punctum E; ex quo applicata EH, incidet in ipſum punctum flexus quæſitum: ad quod, y jam inventâ, duci poterit tangens eo modo, quem ſuprà indicavimus.

Eandem hanc æquationem, ni fallor, invenit, & ingenioſè, ut ſolet, per parabolam & circulum ſolvit, Vir nobiliſſimus & merito ſuo celeberrimus Chriſtianus Hugenius, in fine libelli, cui titulum fecit, De Magnitudine Circuli, inventa. Poteſt autem hæc æquatio ulterius deprimi, applicatione factâ ad $b + y$: prodit enim $2bzz \parallel 3byy + y^3$.

Vel etiam, ſi $b + y$ dicatur v, $2bzz - 2b^3 \parallel v^3 - 3bbv$.

Quas æquationes conſtruere liceret infinitis modis, per ea quæ tradidimus libello ſuperiore De Analyſi.

Verùm, quod nunc intendimus, quærenda eſt linea, cujus interſectione cum Conchoide, ſolvatur Problema. Itaque poſitis iiſdem, HE ſit e.

Nunc quoniam, ex proprietate Conchoidis, ut quadratum BE, ad quadratum XH, ſivè yy, ad zz; ita quadratum CE, hoc eſt $bb + yy + 2by$, ad quadratum CH: erit quadratum CH,

bbzz

$\frac{bbzz + yyzz + 2byzz}{yy}$. Quod cùm æquale ſit duobus quadratis CE, EH, fiet æquatio $\frac{bbzz + yyzz + 2byzz}{yy} \parallel ee + bb + yy + 2by$.

Hoc eſt, ductis omnibus in yy, $bbzz + yyzz + 2byzz \parallel eeyy + bbyy + y^4 + 2by^3$.

Sed ut ſuprà oſtendimus, in puncto maximæ æquatio erat

$2bzz \parallel 3byy + y^3$. Igitur ductis omnibus in y, fiet

$2bzzy \parallel 3by^3 + y^4$. Et ductis in eâdẽ ęquatione omnibus in b,

$2bbzz \parallel 3bbyy + by^3$. Sivè ſumtis dimidiis,

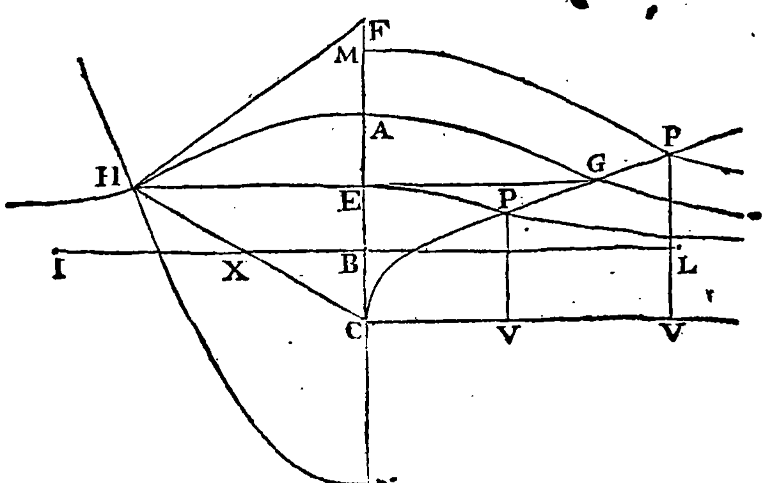
$bbzz \parallel \frac{3}{2}bbyy + \frac{1}{2}by^3$.

Itaque in æquatione ad Conchoidem, $bbzz + yyzz + 2byzz \parallel eeyy + bbyy + y^4 + 2by^3$, pro $bbzz$, & $bbzy$, poſito eorum valore jam invento prodibit nova æquatio,

$\frac{3}{2}bbyy + \frac{1}{2}by^3 + zzyy + 3by^3 + y^4 \parallel eeyy + bbyy + y^4 + 2by^3$

ſivè, ablatis æqualibus, & reſiduo applicato ad yy,

$\frac{1}{2}bb + zz + \frac{3}{2}by \parallel ee$. Quæ æquatio eſt ad Parabolam.



Patet igitur quomodò deſcribi debeat Parabola, quæ Conchoidem ſecet in puncto quæſito. Sit enim facilitatis gratiâ, $zz \parallel bn$. Igitur $\frac{1}{2}bb + bn + \frac{3}{2}by \parallel ee$.

Eſt

Eſt autem $\frac{1}{2}bb + bn + \frac{3}{2}by$, productum ex $\frac{3}{2}b$, in $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}b + y$. Itaque productâ BC, ſi opus ſit, in illâ ſumatur BN, æqualis $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}b$; & vertice N, axe NB, latere recto, ſeſquialtero ipſius BC, ſivè $\frac{3}{2}b$, deſcribatur parabola NH: occurret enim illa Conchoidi in punctis H & G, quæſitis.

Demonſtratio facilis eſt: nam ob parabolam, quadratum HE, ſivè ee, æquale erit rectangulo ex NE, ſivè $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}b + y$, in latus rectum, ſivè $\frac{3}{2}b$. Igitur eſt $\frac{1}{2}bb + bn + \frac{3}{2}by \parallel ee$, & poſito pro bn, ejus valore zz,

$$\frac{1}{2}bb + zz + \frac{3}{2}by \parallel ee$$

Sivè ductis omnibus in $2yy$.

$$bbyy + 2zzyy + 3by^3 \parallel 2eeyy.$$

Æquatio autem ad Conchoidem eſt,

$$bbzz + yyzz + 2qyzz - bbyy - y^4 - 2by^3 \parallel eeyy.$$

Igitur loco $2eeyy$, ſubſtituendo, in ſuperiori æquatione, ejus valorem fiet $bbyy + 2zzyy + 3by^3 \parallel 2bbzz + 2yyzz + 4byzz - 2bbyy - 2y^4 - 4by^3$.

Vel ablatis æqualibus, & factâ Metatheſi,

$$2bbzz + 4byzz - 3bbyy - 2y^4 - 7by^3 \parallel 0.$$

Quæ æquatio applicata ad $b + 2y$, dat $2bzz - 3byy - y^3 \parallel 0$. Sivè $2bzz \parallel 3byy + y^3$. Eandem nimirùm æquationem, quam in puncto flexus requiri ſuprà diximus.

Æquatio ad parabolam, ſumto utriuſque partis duplo, & factâ metatheſi mutatur in hanc, $2zz \parallel 2ee - bb - 3by$. Et ductis omnibus in b, fit

$$2bzz \parallel 2bbee - b^3 - 3bby.$$

Sed $2bzz$, æquatur $3byy + y^3$: Igitur ſubſtituendo, loco $2bzz$, ejus valorem erit $3byy + y^3 \parallel 2bee - b^3 - 3bby$.

Sivè $b^3 + 3bby + 3bby + y^3 \parallel 2bee$. Hoc eſt cubus $b + y$, æquabitur ſolido ex $2b$, in ee.

Itaque ſi vertice C, axe CV, parallelo BL, latere recto $2b$, ſivè duplo CB, deſcribatur ſemiparabola CGP, in quâ applicatarum cubi, eandem inter ſe rationem habeant, quam partium axis quadrata, occurret illa Conchoidi in puncto flexus. Hoc enim eodem modo demonſtrari poteſt, quo ſuprà in parabolâ ſimplici uſi fuimus.

Sed hoc leve eſt, & improprium, cùm hæc curva CGP, excedat

cedat locum ſolidum. Aliquam verò obſervationem meretur, quod in hâc ultimâ æquatione deſit z. Vndè evidens eſt, eam applicari infinitis Conchoidibus, quæ iiſdem polo C, & aſymptoto IBL, deſcriberentur; quâlibet longitudine ipſius BA aſſumtâ.

Sumatur enim quælibet BM, major vel minor BA, & deſcribatur Conchois MP, quæ occurrat parabolæ CGP. Dico P, eſſe punctum flexus Conchoidis MP.

Cadat ex P, in CV, normalis PV. Denominatis, ut prius, lineis, erit PV, $b + y$; & CV, e. Itaque ob parabolam, fiet $2bee \parallel b^3 + 3bby + 3byy + y^3$. Eritque Analogiſmus, ut ee, ad $bb + 2by + yy$; ita $b + y$, ad $2b$. Et componendo, ut $ee + bb + 2by + yy$, ad $bb + 2by + yy$, ita $3b + y$, ad $2b$. Sed in Conchoide, eſt ut $ee + bb + 2by + yy$, ad $bb + 2by + yy$, ita quadratum MB, ad yy: Erit igitur, ut quadratum MB, ad yy; ita $3b + y$, ad $2b$. Et $3byy + y^3$, æquabitur ſolido ex $2b$, in quadratum MB. Quod in puncto flexus ſemper contingere oſtendimus.

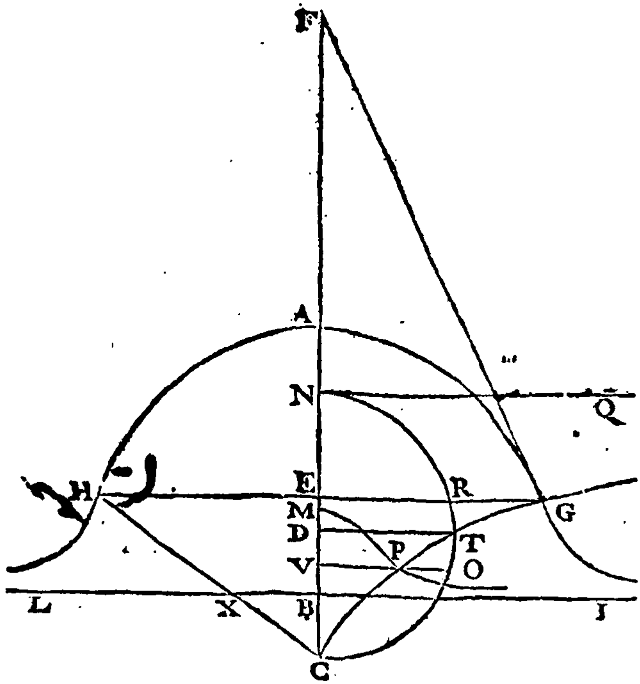
Patet igitur, ſi polo C, aſymptoto IBL, axe CB in infinitum producto, ex quolibet puncto ultra B, in rectâ CB aſſumto, deſcribatur Conchois; illam parabolæ occurſuram in puncto flexus. Et omnia puncta flexus infinitarum Conchoidum, ut præſcriptum eſt, eodem polo, & aſymptoto deſcriptarum, eſſe in eâdem curvâ CGP.

Adinſtar hujus Conchoidis licet alias innumeras componere, in quibus eadem inveniri poſſunt. Exempli gratiâ, polo C, aſymptoto IBL, axe CBA deſcripta intelligatur curva HGA, cujus hæc ſit proprietas; ut ſumto in eâ quovis puncto H, & ductâ CH, ſecante aſymptoton in X, rectangulum CXH, ſemper ſit æquale rectangulo CBA.

Denominentur, ut prius, partes; CB, b. BA, z. Normalis HE, e. BE, y. Nunc (ob parallelas HE, XB) erit ut rectangulum CXH, ad rectangulum CBE, ita quadratum CH, ad quadratum CE: & cùm rectangulum CXH, ſit æquale rectangulo CBA (ex proprietate curvæ) erit in terminis Analyticis,
ut bz, ad by, ſivè z, ad y; ita $ee + bb + 2by + yy$, ad $bb + 2by + yy$.
Et æquatio ad quodlibet punctum curvæ,

$$eey + bby + 2byy + y^3 \parallel bbz + 2byz + yyz.$$

Intelligatur



Intelligatur ad punctum quodvis, ut G, ducta tangens, occurrens axi in F. Erit E F, $\frac{bbz + bzy + 2zyy - 2y^3}{bz - zy + 2yy}$. Et per cōſequens BF $\frac{bbz + bzy + 2zyy - 2y^3}{bz - zy + 2yy} + y$, ſivè $\frac{bbz + 2bzy + zyy}{bz - zy + 2yy}$.

Cujus fractionis determinatio, eſt $\frac{2bz + 2zy}{4y - z}$.

Itaque in puncto maximæ, erit æquatio,

$$\frac{bbz + 2bzy + zyy}{bz - zy + 2yy} = \frac{2bz + 2zy}{4y - z}$$

Sivè, ablato ab omnibus z,

$$\frac{bb + 2by + yy}{bz - zy + 2yy} \parallel \frac{2b + 2y}{4y - z}.$$

Hoc eſt, factâ multiplicatione, ad tollendam fractionem & ablatis æqualibus, $4bby + 4byy \parallel 3bbz + 2bzy - zyy$. Et applicatis omnibus ad $4b + z$,

$$\frac{3bbz}{4b + z} \parallel \frac{4bby + 2bzy}{4b + z} - yy.$$ Æquatio ad circulum.

Per circulum itaque inveniri poteſt y, ſivè recta B E: undè ducta EH normalis, incidit in punctum flexus H.

Imò nec circulo eſt opus. Nam æquatio ſuperior,

$$3bbz + 2bzy - zyy - 4bby - 4byy \parallel o$$

diviſa per $b - y$, dat $3bz - zy - 4by \parallel o$ ſivè $3bz \parallel zy + 4by$.

Eſt igitur, ut BA cum quadrupla CB, ſive AC cum triplâ CB, ad triplam C B; ita AB, ad BE.

Sed ſi quis velit circulum occurrentem curvæ HAB, in puncto G; facile inveniri poterit, conſiderando æquationem ipſius curvæ ſuprà poſitam: nimirùm $eey + bby + 2byy + y^3 \parallel zbb + 2zby + zyy$. Eamque conferendo, cum hâc $3bz \parallel zy + 4by$.
Ex ultimâ enim, ductâ in b, & applicatâ ad 3, fit

$$bbz \parallel \tfrac{1}{3}bzy + \tfrac{4}{3}bby.$$

Itaque loco bbz, poſito ejus valore in æquatione ſuperiori, habebitur

$$eey + bby + 2byy + y^3 \parallel \tfrac{2}{3}bzy + \tfrac{4}{3}bby + zyy + 2zby$$

ſivè applicatis omnibus ad y, ablatiſque æqualibus, & factâ Metatheſi

$$ee \parallel \tfrac{8}{3}bz + \tfrac{1}{3}bb + zy - 2by - yy$$ ad circulum.

Et ſi loco zy, ſubſtitueretur ejus valor $3bz - 4by$; fieret rurſus alia,

$$ee \parallel \tfrac{26}{3}bz + \tfrac{1}{3}bb - 6by - yy$$ ad circulum.

Et poſito, in hac æquatione, pro $6by$, ejus valore $\tfrac{3}{2}zy - \tfrac{9}{2}bz$; daretur tertia etiam ad circulum, $ee \parallel \tfrac{25}{6}bz + \tfrac{1}{3}bb + \tfrac{3}{2}zy - yy$.
Quarum æquationum conſtructio valdè obvia eſt.

Si quis verò, ut in ſuperiori Conchoide, locum ſcire velit ad quem ſunt puncta flexus omnium harum Conchoidum, quæ eodem polo C, & ad eandem Aſymptoton IBL, deſcribi poſſunt; inveniet hoc modo.

Quoniam in puncto maximæ $3by - zy$ æquatur $4by$; igitur z, erit $\frac{4by}{3b - y}$. Nunc, ex proprietate curvæ, ut vidimus, eſt ut zz ad y; ita

ita $ee + bb + 2by + yy$ ad $bb + 2by + yy$. Erit igitur dividendo

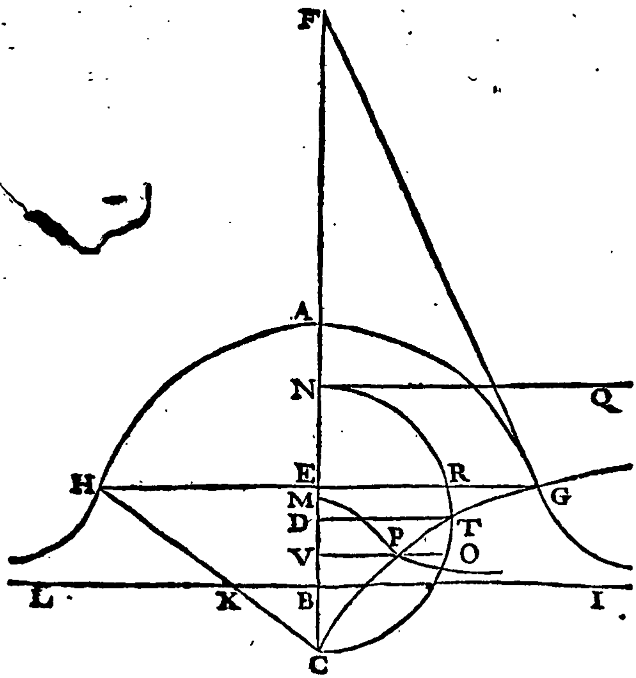
ut $z - y$, ad y; ita ee, ad $bb + yy + 2by$.

Subſtituatur loco z, ejus valor: fiet

ut $\frac{4by}{3b-y} - y$, ad y; ita ee, ad $bb + yy + 2by$.

Sivè ductis duobus primis terminis in $3b - y$, & applicatis ad y,

$b + y$, ad $3b - y$; ita ee ad $bb + yy + 2by$.



Vnde oritur æquatio, $3bee - yee = b^3 + 3bby + 3byy + y^3$, ſive cubo $b + y$. Deſcribatur itaque linea, quam hæc æquatio indicat. Nimirùm

mirùm in rectâ BA, ſumta BN, tripla BC, & in eâ quolibet puncto E; fiat ut NE, ſivè $3b-y$, ad CE, ſivè $b+y$; ita quadratum CE ſivè $bb+2by+yy$, ad quadratum normalis EG; quæ quidem erit e, ut evidens eſt. Sic verò ſemper fiat ſumtis punctis, donec deſcribi poſſit curva PGP: quæ ut ex deſcriptione patet, habebit Aſymptoton rectam infinitam in N, normalem ad CN: Eſtque Ciſſois veterum, ſed in infinitum producta per totum ſemicirculum, eâdem ratione, quâ ab antiquis in quadrante deſcribebatur.

Nam fiat ſuper CN ſemicirculus NOC, occurrens curvæ in T; undè cadat normalis TD: cadet illa in centrum circuli. Eſt enim, ob Conchoidem, ut ND, ad DC, ita quadratum DC, ad quadratum DT: hoc eſt, ob circulum, ita DC, ad ND. Sunt igitur æquales ND, DC.

Sumatur nunc inter D, & B, quodlibet punctum V; ex quo erigatur in circulo normalis VO, ſecans, curvam in P. Erit rurſus, ob Conchoidem, ut NV, ad VC; ita quadratum VC, ad quadratum VP. Sed ut NV, ad VC; ita quadratum NV, ad quadratum VO: igitur, ut quadratum NV, ad quadratum VO; ita quadratum VC, ad quadratum VP: ſivè ut NV, ad VO; ita VC, ad VP. Cùm autem ſit ut NV, ad VO: ità VO, ad VC: erunt quatuor NV, VO, VC, VP, in continuâ analogiâ: eritq; punctum P, ad Ciſſoidem. Similiter & de quolibet alio puncto oſtendi poteſt; & ſi curva TP, eadem ratione producatur uſque in C, patet curvam TPC fore antiquorum Ciſſoidem.

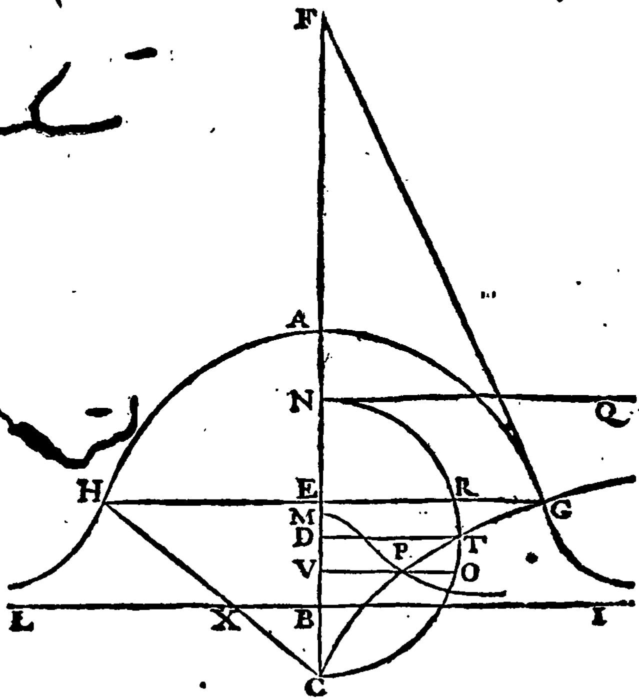
Producitur autem in infinitum eadem ratione; ſumendo inter N, & F, quodlibet punctum E, & faciendo rurſus quatuor continuè proportionales, NE, ER, EC EG; ut patet ex figurâ, & præcedenti deſcriptione.

Ad hanc autem Ciſſoidem eſſe punctum flexus contrarii cujuſlibet Conchoidis, Polo C, Aſymptoto IBL, deſcriptæ, ſic oſtendetur. ſumto in CB productâ, quolibet puncto M (ſivè M cadat infrà, ſivè ſuprà N, ſivè in ipſum punctum N) deſcribatur Conchois MP, occurrens Ciſſoidi in P puncto; ex quo cadat normalis PV, ad NB. CB, ut priùs, ſit b. BV, y. VP, e. Erit NV, $3b-y$. Itaque ob Ciſſoidem, erit ut $3b-y$, ad $b+y$, ita $bb+yy+2by$, ad ee. MB nunc dicatur z: erit igitur MV, $z-y$. Et, ex proprietate Conchoidis, eadem erit ratio $z-y$, ad y, quæ $bb+yy+2by$, ad ee.

Igitur ut $3b-y$, ad $b+y$, ita $z-y$, ad y. Ex quo Analogiſmo oritur

æquatio

tur æquatio $4by + zy \parallel 3zb$. Eadem nempè quæ punctum flexionis, ex iis quæ ſuperiùs oſtendimus, in Conchoide determinat.



Et hactenus quidem quæcumque prius in Conchoide Nicomedis oſtenderamus; in hâc noſtrâ pariter demonſtravimus. Sed eſt aliquid huic proprium, ut indicat fractio, quam ſuprà dedimus pro tangente in quolibet puncto. Erat illa $\frac{bbz + bzy + 2zyy - y^3}{bz - zy + 2yy}$ æqualis EF.

Vti & hæc $\frac{bbz + 2bzy + zyy}{bz - zy + zyy}$ æqualis BF. In quibus idem eſt denominator $bz - zy + zyy$.

Cùm

Cùm verò in illo adſit diverſitas ſignorum + & -; & fieri poſſit ex variâ ratione b ad z, ut quantitas ſigno negativo affecta, vel æqualis ſit, vel major aliis; evidens eſt, neutro ex his caſibus fieri poſſe, ut tangens in puncto; in quo ſimilem æquationem dari continget, ducta, concurrat cum BA productâ. Nam æquatione pro BF reſolutâ in Analogiſmum, eſt ut $bz - zyy + 2yy$, ad $bb + zz + 2by$; ita z, ad BF.

Itaque ſi in primo termino quantitas negativo ſigno affecta, æqualis ſit aliis; totum æquabitur nihilo: & per conſequens quartus terminus erit infinitus. Et ſi quantitas eadem ſit major aliis; totum erit minus nihilo: & quartus terminus erit, non ſimpliciter, ſed, ſi ita loqui liceat, pluſquam infinitus. Quod quomodò intelligendum ſit infrà explicabitur.

Examinemus primò caſum, quo zy æquatur $bz + 2yy$. Eo enim caſu, cùm BF ſit ſemper infinita, ut vidimus; tangens eſt axi parallela. Igitur quoniam $bz + 2yy$ æquatur zy; erit $\frac{1}{2}bz \parallel \frac{1}{2}zy - yy$.

Quæ æquatio cùm ſit amphibola; quando erit poſſibilis, vel habebit duas ſolutiones, & y poterit de duabus lineis explicari: vel unam tantùm. Ac ſi quidem unam dumtaxat habeat, y de una tantùm lineâ explicabitur, & unica tangens duci poterit axi parallela. Si verò duas, duæ pariter duci poterunt. At ſi æquatio ſit impoſſibilis, nulla ex tangentibus erit axi parallela, ſed omnes cum axe concurrent. Conſtat autem, eo caſu quo æquatio unam tantùm ſolutionem habet, y æqualem eſſe $\frac{1}{4}z$, & per conſequens $\frac{1}{2}bz$ æquari $\frac{1}{16}zz$; ſivè b, eſſe $\frac{1}{8}z$.

Igitur quando z, erit æqualis $8b$; ſivè quando BA, erit octupla BC; tangens Conchoidem in puncto flexus, erit axi CA parallela.

Si verò z ſit minor quàm octupla; cùm tunc æquatio ſit impoſſibilis, nulla tangens duci poterit axi parallela, ſed omnes cum BA concurrent, ſivè ad punctum flexus ducantur, ſivè ad aliud. Tunc enim in denominatore $bz - zy + 2yy$, quantitates affirmativæ majores erunt negativa.

At ſi z ſit major quàm octupla b; dabuntur duæ tangentes axi parallelæ, cùm y de duabus lineis explicari poſſit. Et tamen tangens in puncto flexus, quod ſuprà oſtendimus eſſe ad Ciſſoidem, neque parallela erit AB, neque cum illa productâ concurret: ſed eam ſecabit à parte B. Ideoque cùm eo caſu quantitas negativa major ſit affirmativis,

ut habeatur B F, mutanda ſunt in ſuperiori fractione omnia ſigna denominatoris, hoc modo $\frac{bbz + 2byz + zyy}{zy - bz - 2yy}$

Et ut breviter abſolvam, eo caſu curva AH flectitur & reflectitur adinſtar literæ S. Vndè in puncto ſummo curvitatis exterioris habet unam tangentem axi parallelam, & aliam pariter in ſummo puncto curvitatis interioris: inter quæ puncta cadit punctum flexus per quod tranſit Ciſſois, ut oſtendimus. Quæ omnia patent ex conſideratione ſuperioris Analyſeos.

Inveniri etiam poſſet locus ad quem ſunt ſemper duo puncta ſuprema curvitatis exterioris & interioris, quæ in omni Conchoide reperiri diximus, in quâ ratio AB, ad BC, maior eſt octuplâ.

Nam cùm in illis bz, ſemper ſit æquale $zy - 2yy$: erit $z = \frac{2yy}{y-b}$

Ex proprietate verò curvæ HAG, ut ſæpè vidimus, eſt ſemper ut $z - y$, ad y; ita ee, ad $bb + yy + 2by$.

Igitur ſubſtituendo pro z, ejus valorem, fiet

Ut $\frac{2yy}{y-b} - y$, ad y; ſivè $y + b$, ad $y - b$; ita ee, ad $bb + 2by + yy$.

& æquatio $eey - eeb = b^3 + 3bby + 3byy + y^3$: hoc eſt cubo $b + y$. Itaque ſi quis ſecundùm hanc æquationem curvam deſcriberet, eo modo quem ſupra in deſcribenda Ciſſoide adhibuimus; occurreret illa cuilibet Conchoidi in punctis curvitatis ſummæ, tàm interioris, quàm exterioris, ſi illa haberet: hoc eſt, ſi ratio AB ad BC, maior eſſet octuplâ, at ſi octupla eſſet, tangeret Conchoidem in puncto flexus. Non tangeret verò, neque ſecaret, ſi minor eſſet quàm octupla.

Patet verò ex æquatione hanc curvam non eſſe Ciſſoidem; ſed non ineptè, ut arbitror, vocari poſſet anticiſſois. Cùm in ciſſoide cubus $b + y$, æqualis ſit ſemper ſolido ex $3b - y$, in ee; in hac verò idem cubus, perpetuò æquetur $y - b$, in ee. Sed de his ſatis.

Occaſione Ciſſoidis & huius Conchoidis, duas obſervationes adiungo; licet ad hanc materiam non pertineant.

Prima eſt, ſolidum acutum infinitum, ortum ex revolutione ciſſoidis CGP, circa ſuam aſymptoton NQ; æquale eſſe ſemiannulo ſtricto, genito ex revolutione ſemicirculi NOC, circa candẽ aſymptoton, vel eidem parallelam in puncto C. Nam cum ſumto in NC, quolibet puncto V, & applicatâ ad ciſſoidem, & ſemicirculum recta VPO, ſit

ſit ſemper ut NV, ad VO, ita CV ad VP; evidens eſt, rectangulum CVO, ſemper æquale eſſe rectangulo NVP. Vnde ſequitur per indiviſibilia, dupla omnium rectangulorum NVP, ſivè ſolidum infinitum, æquari duplis omnium rectangulorum CVO; ſivè ſemiannulo ex revolutione ſemicirculi circa normalem in C. Cùm verò cylindrus in eadem baſi & altitudine cum ſemiannulo, habeat ad illum eandem rationem, quam habet rectangulum circumſcriptum ſemicirculo, ſivè rectangulum ex NV in FT, ad eundem ſemicirculum; patet datâ ratione ſolidi infiniti ad cylindrum, dari circuli menſuram.

Altera eſt; ſolidum infinitum ortum ex revolutione Conchoidis AG, circa ſuam aſymptoton BL; eſſe etiam æquale ſemiannulo lato, genito ex revolutione ſemicirculi ſuper AB diametro deſcripti, circa normalem in puncto C erectam. Nam, ſumto in AB quolibet puncto E, & applicatâ EG ad Conchoidem, ex ejuſdem proprietate, eſt ſemper ut AE, ad EB, ita quadratum GE, ad quadratum CE. Sed ut AE, ad EB; ita quadratum applicatæ ad ſemicirculum ſuper AB deſcriptum, in puncto E, ad eiuſdem EB quadratum: Igitur, ut eadem applicata, ad EB; ita GE, ad EC. Rectangulum itaque GEB, æquale ſemper eſt rectangulo ex CE, in eandem applicatam. Igitur, ut prius ſolidum infinitum, æquatur ſemiannulo lato: & ſi daretur eiuſdem ratio ad cylindrum excavatum circumſcriptum ſemiannulo, daretur rurſus circuli dimenſio.

CAPUT VI.

De loco ad quem eſt punctum incidentiæ lineæ minimæ, quæ ducitur à puncto dato ad parabolam.

PVlchram Parabolæ proprietatem obſervavit Vir Clariſſimus, de Geometriâ optimè meritus, Vincentius Viviani propoſitione 21. libri 2. eorum quibus Appollonium de maximis & minimis, pari ingenio ac felicitate reſtituit, demonſtravit enim, ſi ad

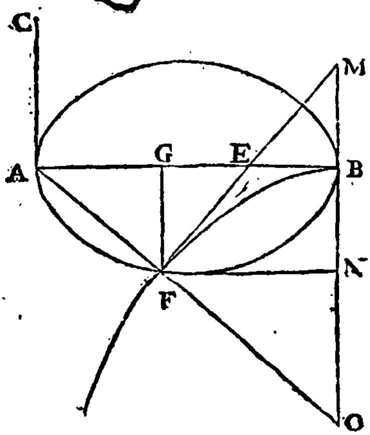
ſi ad parabolas, quotquot eodem vertice & axe deſcribi poſſunt, à puncto in axe communi dato, ducantur minimæ lineæ; omnia puncta incidentiæ fore in eadem Ellipſi datâ.

Hoc me movit, ut quærerem ad quem locum ſint, cùm punctum datur extra axem; & Analyſis me docuit propoſitionem univerſaliter veram eſſe; punctaque omnia incidentiæ ſemper eſſe in eadem Ellipſi, ubicumque tandem ſit punctum, à quo minima ducenda præſcribitur.

Animadverti inſuper ex eadem Analyſi, id non tantùm verum eſſe in parabolâ ſimplici; ſed etiam in infinitis illis, in quibus quælibet dignitates applicatarum eandem inter ſe rationem habent, quàm aliæ partium axis dignitates. Quod ut univerſaliter oſtendam, diſtinguendi ſunt tres caſus.

Vel enim normalis quæ ducitur à puncto dato ad axem parabolæ, cadit in verticem illius; vel ſuprà, vel infrà eundem.

Cadat primò in ipſum verticem: ſitque punctum datum A, vertex parabolæ B, axis BO. Erit itaque angulus ABO rectus.



Fiat nunc ut exponens dignitatis applicatarum in parabolâ, ad exponentem partium axis in eadem, ita BA ad AC: & axe AB, latere recto AC, deſcribatur Ellipſis AFBA, ſecans parabolam datam in F. Vel eodem vertice B, & axe BO, deſcribatur eadem parabola ejuſdem gradus, occurrens Ellipſi jam deſcriptæ in quolibet puncto F: id enim perindè eſt Dico rectam AF, eſſe minimam omnium, quæ à puncto A, ad eandem parabolam duci poſſunt. Erigatur ad AF normalis FM, occurrens AB in E, & rectæ OB productæ, in M; ac cadat ex F in AB, normalis FG, & in BO, normalis FN.

Evidens eſt, ob Ellipſim rectangulum BGA, ad quadratum GF, eſſe in ratione BA, ad AC. Sed quadratum GF, æquale eſt rectangulo

AGE, cùm angulus AFE ſit rectus ex conſtructione : igitur rectangulum BGA, ad rectangulum AGE, ſive (ſublatâ AG communi altitudine) BG, ad GE, erit ut BA, ad AC. Sed ut BG, ad GE; ita MF, ad FE, ſivè MN ad NB, ob parallelas : igitur ut BA, ad AC; ita MN, ad NB, tangit igitur recta FM parabolam in puncto F.

Suppono enim ut notum; ad ducendam in infinitis illis parabolis in quolibet puncto dato tangentem, exempli gratiâ in F, à quo applicatur ad axem recta FN; producendam duntaxat NB in M, donec ratio MN, ad NB, ſit eadem, quæ exponentis dignitatis applicatarum in parabola datà, ad exponentem dignitatis partium axis: junctam enim FM tangere eandem in puncto F. Nam id ſæpè demonſtratum eſt; & facile oſtendi poſſet ex propoſitione univerſali quam dedimus cap. 4.

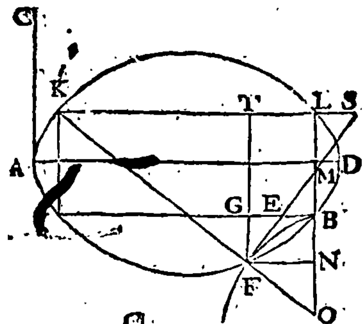
Itaque cùm ratio BA ad AC, ſit eadem, ex conſtructione, quæ exponentis dignitatis applicatarum, ad exponentem dignitatis partium axis in parabolâ; ſit autem ut BA, ad AC, ita MN, ad NB: patet junctam FM, tangere parabolam in F; & per conſequens, AF eſſe minimam omnium linearũ, quæ à puncto A, ad parabolã BF duci poſſunt.

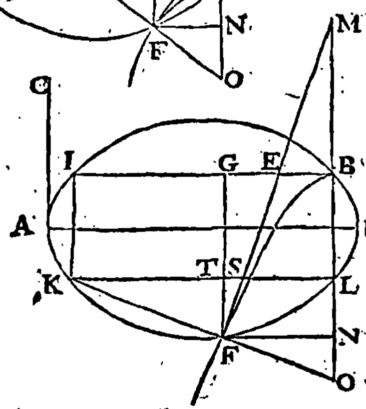
Cùm autem id locum habeat in parabolâ ejuſdem gradus tranſeunte per quodlibet punctum ſemiellipſis AFB: quandoquidem punctum F ſumi poſſit ad libitum, ex conſtructione; evidens eſt omnia puncta incidentiæ linearum minimarum, à puncto A dato, ad omnes parabolas ejuſdem gradus, quæ vertice B, axe BO, deſcribi poſſunt; eſſe in eadem Ellipſi datâ AFB. Quod erat, &c.

Detur nunc punctum K, vertex parabolæ B; axis BO: & cadat ex K in axem productum, ſi opus ſit, normalis KL, ſive L ſit ſuprà, ſivè infrà verticem B; nam utrumque caſum unicâ demonſtratione complectimur.

Perficiatur rectangulum KLBI; & circa illud deſcribatur Ellipſis, cujus axis major AD, ſit parallelus KL: & in quâ axis ejuſdem AD, ad latus rectum AC, habeat ut prius, eandem rationem, quam habet exponens dignitatis applicatarum in parabolâ, ad exponentem dignitatis partium axis in eadem. Deindè, ſumto inter I, & axem BO, quolibet in Ellipſi puncto F; deſcribatur, ut ante, parabola BF, ſecans Ellipſim in F: & ex puncto F, cadat in BO normalis FN; & in BI normalis FG; quæ producta, ſi opus ſit, occurrat rectæ KL, in T. Demùm juncta KF, erigatur ad illam normalis FM, occurrens

NB,





NB, in M, rectæ IB in E, & KL, ſi opus ſit, productæ, in S. Dico KF eſſe minimam omnium, quæ à puncto K, ad parabolam duci poſſunt.

Nam rectangulum IGB, ad rectangulum TFG, eſt ut DA, ad AC, ob Ellipſim. Ratio verò rectanguli IGB, ad rectangulum TFG, componitur ex ratione IG, ſive KT, ad TF; hoc eſt FT, ad TS, ob angulũ rectum KFS; ſivè FG, ad GE, ob parallelas TS, GE: & ex ratione BG, ad GF. Duæ autem illæ rationes, componunt rationem rectanguli FGB, ad rectangulum FGE; ſivè demtâ FG communi altitudine, rationem BG, ad GE: Igitur ut DA, ad AC; ita BG, ad GE: hoc eſt MN, ad NB. Patet igitur, ut prius, rectam MF, tangere in puncto F, parabolam vertice B, axe BO, deſcriptam, cujus exponens dignitatis applicatarum, ad exponentem dignitatis partium axis rationem habeat DA, ad AC: & per conſequens, rectam KF eſſe minimam. Quod erat, &c.

Analyſim ſi quis deſideret, ecce illam. Recta incidens in axem ex puncto dato ut BA in primâ figurâ, KL in aliis, ſit *d*.

LB, *n*.
BN, *a*.
FN, *e*.
Erit KT, *d*-*e*.
Et LN vel FT, *a*-*n*. Si punctum L

 ſit

ſit infra verticem B; vel $a + n$ ſi ſupra. At ſi cadat in ipſum verticem, tunc quia deficit LB, ipſa FG, æqualis erit BN, ſive a.

Intelligatur itaque AF in primo ſchemate, KF in aliis, eſſe minima; quæ productæ ſecent axem parabolæ in O; & ad F punctum, ducta tangens FM, occurrat eidem axi in M.

Erit igitur, ex proprietate parabolæ cujuſlibet, ut exponens dignitatis applicatarum, ad exponentem dignitatis partium axis, ita MN, ad NB.

Exponens dignitatis applicatarum ſit q, partium axis z.

Erit igitur, vt q, ad z; ita MN, ad a. Et MN $\parallel \frac{qa}{z}$

Eſt autem, ob angulum rectum, ut MN, ad NF; ita NF ad NO.

Erit itaque, ut $\frac{qa}{z}$, ad e; ita e, ad NO. Et NO $\parallel \frac{zee}{qa}$.

Nunc ob triangulorum ſimilitudinem, eſt in primo ſchemate, ut AG, ad GF, ita NF, ad NO; ſivè ut $d-e$, ad a, ita e, ad $\frac{ae}{d-e}$. Igitur NO $\parallel \frac{ae}{d-e}$

In aliis vt KT, ad TF, ita NF, ad NO: ſivè ut $d-e$, ad $a-n$ (ſi L cadit infra B) vel ut $d-e$, ad $a+n$ (ſi cadit ſupra) ita e, ad NO.

Itaque primo caſu, NO æquabitur $\frac{ae}{d-e}$.

Secundo $\frac{ae-ne}{d-e}$.

Tertio verò $\frac{ae+ne}{d-e}$.

Invenimus autem priùs, NO ſemper æquari $\frac{zee}{qa}$.

Igitur primo caſu erit æquatio $\frac{ae}{d-e} \parallel \frac{zee}{qa}$. Sivè $qaa \parallel dze-zee$.

Secundo $\frac{ae-ne}{d-e} \parallel \frac{zee}{qa}$ Sivè $qaa-qna \parallel dze-zee$.

Tertio $\frac{ae+ne}{d-e} \parallel \frac{zee}{qa}$ Sivè $qaa+qna \parallel dze-zee$.

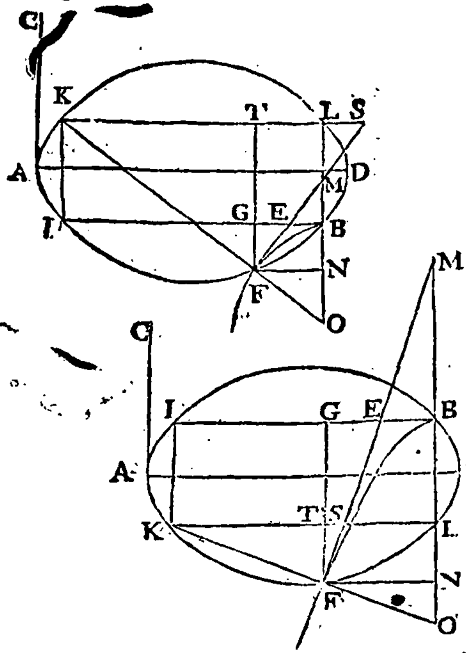
Quæ

Quæ tres æquationes ſunt ad Ellipſim: & ex illis deducuntur tres analogiſmi, conſtructiones, quas ſuprà dedimus, indicantes. Nempè

$$q / z / de - ee / aa.$$

$$q / z / de - ee / aa - na.$$

$$q / z / de - ee / aa + na.$$



Notandum eſt, tam demonſtrationem ſuperiorem, quàm Analyſim, extendi ad omnes parabolarum ſpecies; etiam illas in quibus ſupponeretur exponens dignitatis applicatarum minor exponente partium axis. Nam omni caſu verum eſt, quod ſuprà diximus, de ducendâ tangente ad punctum parabolæ datum F. Nimirum MN, ad NB, habituram ſemper rationē exponentis dignitatis applicatarum ad exponentem dignitatis partium axis. Sed ubi hic major eſt illâ, tunc M cadit inter B & N: connexum enim parabolæ vergit ad partes BN.

Vndè ſequitur in Ellipſi Latus rectum AC eo caſu majus eſſe ejus axe: & punctum E non cadere inter G & B, ſed ultra B in GB productâ. Verùm eadem ſemper eſt Analyſis & demonſtratio.

Cùm autem magis propriè axem vocemus in qualibet parabolâ, rectam quæ inter cavitatem recipitur: hoc caſu BG potiùs dicendus eſſet axis, & FG applicata ad axem. Itaque punctum A in primo ſchemate intelligi deberet datum in axe parabolæ (ut apud clariſſimum Vivianum in parabolâ quadraticâ) punctum verò K extra axem, ſed intra parabolam.

Hinc

Hinc infertur, demonſtrationem & Analyſim univerſales eſſe, & comprehendere omnem caſum: ſivè punctum datum ſit in axe, ſivè extra axem, ſivè intra cavitatem parabolæ, ſivè extra; ut conſideranti patebit.

Obſervandum eſt etiam, æquationes ad Ellipſim omnibus parabolis communes, quas ſuprà dedimus, ſcilicet $qaa \parallel dze - zee.$

$$qaa - qna \parallel dze - zee$$
$$qaa + qna \parallel dze - zee.$$

Facile mutari poſſe in æquationes ad circulum in parabolâ quadraticâ, cujus latus rectum datum eſſet: hoc eſt, ex puncto dato ad illam, omni caſu duci poſſe ope circuli minimam.

Nam in hac parabola exponens dignitatis applicatarum eſt 2, partium verò axis, eſt unitas, cùm quadrata applicatarum ſint inter ſe ut partes axis.

Itaque loco q, & z, ſubſtituendo eorum valorem ſcilicet 2, & 1; ſuperiores æquationes mutabuntur in has.

$$2aa \parallel de - ee$$
$$2aa - 2na \parallel de - ee$$
$$2aa + 2na \parallel de - ee$$

Sit nunc latus rectum parabolæ b. Quoniam ex proprietate parabolæ, rectangulũ ex latere recto in BN, æquatur quadrato FN; erit $ba \parallel ee$. Auferendo itaque hanc æquationem ab aliis ad Ellipſim fiet

$$2aa - ba \parallel de - 2ee. \text{ Sivè, } aa - \tfrac{1}{2}ba \parallel \tfrac{1}{2}de - ee.$$
$$2aa - 2na - ba \parallel de - 2ee. \text{ Sivè, } aa - na - \tfrac{1}{2}ba \parallel \tfrac{1}{2}de - ee.$$
$$2aa + 2na - ba \parallel de - 2ee \text{ Sivè, } aa + na - \tfrac{1}{2}ba \parallel \tfrac{1}{2}de - ee,$$

Quæ tres æquationes, ſingulæ ſunt ad circulum datum; cujus & parabolæ interſectione ſolvitur Problema.

At ſi ſupponeremus q æquari unitati, & z binario: hoc eſt ſi rectangulum ex latere recto in BG, ſupponeretur æquale quadrato GF; axis parabolæ foret BG & applicata GF; fieretque be, ſemper æquale aa.

Æquationes verò ad Ellipſim eſſent $aa \parallel 2de - 2ee.$

$$aa - na \parallel 2de - 2ee.$$
$$aa + na \parallel 2de - 2ee.$$

quibus addendo hinc indè inæqualia aa & be, & ſumtis dimidiis, haberemus æquationes ad circulum $aa \parallel de + \tfrac{1}{2}be - ee.$

$$aa - \tfrac{1}{2}na \parallel de + \tfrac{1}{2}be - ee.$$
$$aa + \tfrac{1}{2}na \parallel de + \tfrac{1}{2}be - ee.$$

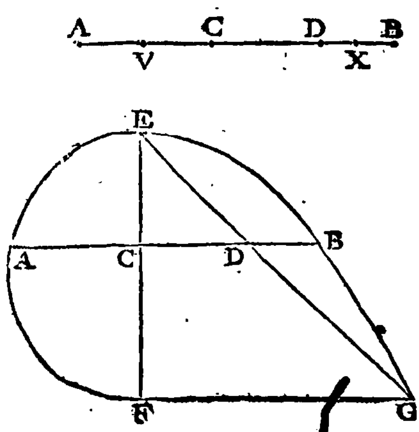
Patet igitur, ubicumque punctum datum intelligatur, ſivè in axe parabolæ, ſivè extra axem, ſivè intra, ſivè extra parabolam; ſemper dari circulum, cujus & parabolæ interſectione inveniri poſſit aliud punctum, ad quod à puncto dato ducta recta, eſt minima quæſita.

CAPUT VII.

De figurarum dimenſione ex dato centro æquilibrii, & ècontrà.

De Centrobarycis ita accuratè hactenus à Viris doctiſſimis ſcriptum eſt, ut nihil addi poſſe videatur. Aliquot tamen modos hic adſcribam, ut non difficiles, ita nec inutiles ad inveſtiganda æquilibrii centra, ex notâ figurarum dimenſione, vel ècontrà. Sit igitur

LEMMA PRIMUM.



Si recta AB ſecetur in C, & D, ita ut duo quadrata AC, CD, æqualia ſint quadrato CB; rectarum AC, DB, centrum gravitatis erit punctum C.

Secetur AC bifariam in V, & DB bifariam in X. Quoniam igitur duo quadrata AC, CD, æqualia ſunt quadrato CB, erit quadratũ AC, æquale differentiæ quadratorum

dratorum CB, CD; ſive rectangulo ſub duplâ C D, & DB, in DB. Erit igitur ut DB, ad AC; ita AC, ad duplam CD cum DB; ſivè ſumtis dimidiis, ita CV, ad CX. ſed V, & X, ſunt centra gravitatis linearum AC, DB. Igitur punctum C, eſt earundem centrum gravitatis. Quod erat, &c.

Uſus hujus Lemmatis patebit in exemplo.

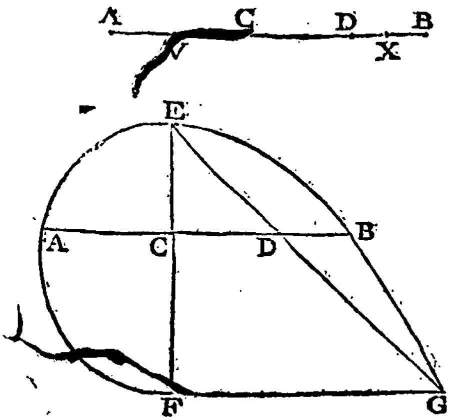
Sit ſemicirculus EAF, cujus diameter EF, & eidem ad rectos æqualis FG, juncta EG, deſcribatur axe EF, vertice E, ſemiparabola tranſiens per G; ſivè cujus latus rectũ ſit ęquale EF, vel FG. Dico ſemicirculum & parabolã EBGE, habere centrum æquilibrii in rectâ EF.

Ducatur quælibet parallela FG, ſecans circumferentiam in A, diametrum in C, rectam EG, in D, & parabolam in B. Patet duo quadrata AC, CD, æqualia eſſe quadrato CB. Nam quadratum AC, æquale eſt rectangulo FCE (ob ſemicirculum:) quadratum CD, eſt æquale quadrato CE, (ob parallelas.) Igitur duo quadrata AC, CD, æqualia ſunt rectangulo FCE, & quadrato CE; ſivè rectangulo FEC: hoc eſt quadrato CB (ob parabolam.) Itaque ex ſuperiori Lemmate, rectarum AC DB centrum gravitatis eſt punctum C. Cùm autem idem contingat, quâlibet alia lineâ ductâ parallelâ FG, evidens eſt, methodo indiviſibilium, omnes AC, ſivè ſemicirculum, & omnes DB, ſivè parabolam EBGE habere commune centrum æquilibrii in lineâ EF. Quod erat, &c.

Hinc patet, dato centro gravitatis ſemicirculi, dari ejus dimenſionem. Eſt enim, ut recta, quæ cadit ex eodem centro gravitatis in diametrum EF, ad rectam, quæ cadit ex centro gravitatis parabolæ in eandem EF, ita parabola EBGE ad ſemicirculum. Id enim exigit ratio æquilibrii. Cùm autem parabola EBGE, ſit pars tertia trianguli EFG (nam ſemiparabola EBGF eſt ejuſdem trianguli ſeſquitertia, ut notum eſt;) & recta quæ cadit ex centro parabolæ EBGE, in EF, ſit æqualis dimidiæ FG (centrum enim gravitatis, eſt in diametro parabolæ, qui parallelus eſt EF, & bifariam dividit tam EG, quàm GF, ut pariter notum eſt;) patet etiam, ita eſſe ſemicirculum, ad tertiam partem trianguli EFG, ſivè ad tertiam partem rectanguli ſibi circumſcripti, ita dimidiam FG, ſivè radium ejuſdem ſemicirculi, ad eam quæ è centro gravitatis ejuſdem cadit in diametrum EF. Quod quidem aliàs ſæpè demonſtratum eſt. Poterunt autem exempla ſimilia magnâ facilitate inveniri, ſi termini Analytici adhibeantur, hoc modo

AC

AC, dicatur *a*.
CB, *e*.
CD, *v*.



Igitur $aa + ee$, ſemper æquabitur vv.

Nunc recta EF, ſit q, & ejus pars EC, ſumta ad libitum ſit y. Evidens eſt, ſi ſciatur quam relationem habeat duo ex tribus quadratis aa, ee, vv, ad q, & y, ductas in quaſlibet rectas datas, vel ad earum dignitates, vel alias ex illis quomodolibet compoſitas; non ignoratum iri, quamnam relationem habeat tertium. Hoc eſt, ſi ſciatur, ſuppoſito communi axe EF, ad quem locum ſint duo, ex tribus punctis A, D, B; non ignorabitur ad quem locum ſit tertium. Cùm autem locum pro duobus, ad libitum ſemper aſſumere liceat, clarum evadit plurimas ac varias propoſitiones ex hoc Lemmate deduci poſſe.

In hoc exemplo, cùm EAF ponatur ſemicirculus; aa æquatur $qy - yy$, & cùm EFG, ſit triangulum rectangulum iſoſceles; e æquatur y & $ee \parallel yy$. Itaque $aa + ee$, æquatur $qy - yy + yy$, ſivè qy. Igitur etiam vv, æquatur qy: & per conſequens punctum B eſt ad parabolam cujus axis EF, vertex E, latus rectum eadem EF. Hoc enim deducitur ex æquatione $qy \parallel vv$.

Si loco ſemicirculi, ſupponeremus quadrantem, centro E, radio EF deſcriptum; tunc aa, æquaretur $qq - yy$; & addito ee, ſivè yy, ob triangulum EFG, fieret $qq \parallel vv$. Itaque loco ſemiparabolæ EBG, perficiendum eſſet quadratum EFG. Et loco parabolæ EBGE, habenemus triangulum æquale alteri EFG. Liceretque concludere, ut prius ita eſſe quadrantem jam deſcriptum, ad triangulum; quemadmodum eſt illa quæ è centro gravitatis trianguli ſive $\frac{1}{3}$ FG, ad illam quæ è centro gravitatis quadrantis, ſi vtraque cadat in EF.

Si loco ſemicirculi, vel quadrantis, poneretur quadratum, retento

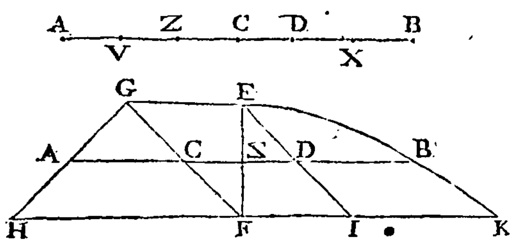
eodem triangulo EFG; pro $aa + ee$, haberemus $qq + yy$. Itaque $qq + yy$, æquaretur vv, eſſetque punctum B, ad hyperbolam æqualium laterum, cujus centrum E, axis, parallelus FG, & quodlibet laterum duplum ejuſdem FG: hoc enim indicat æquatio. Liceret itaque, ex notâ menſurâ ſpatii, inter hyperbolam ſic deſcriptam, & rectam EF, contenti, ejuſdem gravitatis centrum invenire, vel contra. Et hoc quidem exemplorum loco ſufficiant.

Clarum eſſe arbitror ex ſuperiori demonſtratione, non tantùm ſemicirculum & parabolam EBGE, æquiponderare ex puncto E, ſed etiam eorundem partes AEC, DEB; uti & partes, AFC, DGB; & quaſlibet alias, quæ inter parallelas rectæ FG comprehenderentur. Facilè etiam colligitur, ſi ſemicirculus & parabola revolvi intelligantur circa EF, vel etiam eorum partes proportionales, ſolida ab illis genita fore æqualia. Itaque pluribus non inſiſto.

LEMMA SECUNDUM.

Si recta qualibet AB, ſecetur utcumque in Z, & rurſus in C, inter A, & Z; ac in D, inter Z, & B, ita ut quadrata AZ, ZD, ſimul, æqualia ſint quadratis CZ, ZB. erit Z, centrum gravitatis rectarum AC, DB.

Demonſtratur ut anteriùs. Sectis enim rectis AC, DB, bifariam in V, X, quoniam quadrata AZ, ZD, æqualia ſunt quadratis CZ, ZB; ablatis utrimque æqualibus, quadratũ AZ, minus quadrato CZ, æquale erit quadrato ZB, minus quadrato ZD. Eſt autem quadratum AZ minus quadrato CZ, æquale rectangulo ſub AZ, ZC, ſivè dupla



ZV, in CA: & ſimiliter quadratum ZB, minus quadrato ZD, æquale eſt rectangulo ſub BZ, ZD, ſive duplâ ZX, in DB. Igitur rectangulum

gulum ſub dupla Z V in A C, æquale erit rectangulo ſub dupla Z X, in D B. Erit itaque, ut dupla Z V, ad duplam Z X, ſivè ut Z V, ad Z X, ita D B ad A C. ſunt autem rectarum A C, D B, centra gravitatis V, & X. Igitur earundem commune centrum eſt Z. Quod erat, &c.

Idem eſt uſus & applicatio hujus Lemmatis ac prioris.

Sit recta H F, eique ad rectos F E, dimidia ejuſdem. Producatur H E in I, donec F I ſit æqualis F E, junctaque E I, perficiatur parallelogrammum I G, tum ductâ G H; vertice E, axe E F, deſcribatur ſemihyperbola æqualium laterum, quorum unumquodque ſit æquale duplo E H, & quæ occurrat F I productæ, in K. Dico triangulum H G F, æquiponderare trilineo I E K in E, ſivè centrum æquilibrii utriuſque figuræ eſſe in recta E F.

Ducatur quælibet recta A B, parallela K H, ſecans G H in A; G F, in C; E F, in Z; E I, in D; & ſemihyperbolam EBK, in B. E F, ſit q; E Z, y. Igitur Z D, erit pariter y. Z C, $q - y$. Et quoniam A C eſt dupla C D, ex conſtructione, ſivè æqualis $2y$, erit Z A, $q + y$. Latus tranſverſum hyperbolæ, duplum H F, vel quadruplum F E, erit $4q$; &, ex proprietate hyperbolæ æqualium laterum, $4qy + yy$, æquabitur quadrato applicatæ Z B. Itaque eidem quadrato addendo quadratum Z C, ſivè $yy + qq - 2qy$, fiet $qq + 2qy + 2yy$.

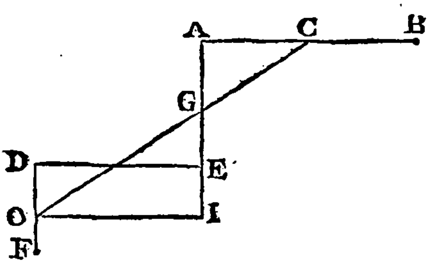
Quadratum verò A Z, ſivè $qq + yy + 2qy$, addito quadrato Z D, ſivè yy, eſt etiam $qq + 2qy + 2yy$: Igitur duo quadrata A Z, Z D, ſimul, ſunt æqualia duobus quadratis C Z, Z B.

Itaque commune gravitatis centrum rectarum AC, D B, eſt punctum Z, ex Lemmate ſecundo.

Reliqua eodem modo ſequuntur, ac in præcedenti Lemmate, ad quod, quæcumque obſervata ſunt, huic etiam facile applicari poſſunt.

LEMMA TERTIUM.

Datis duabus rectis DE, EA, junctis ad angulos rectos in E; ſi ducantur DF, AB, parallelæ EA, & DE, ita ut ſit eadem ratio AB, ad DF, quæ eſt DE, ad dimidiam AB; rectarum DF, AB, centrum gravitatis erit in rectâ AE.

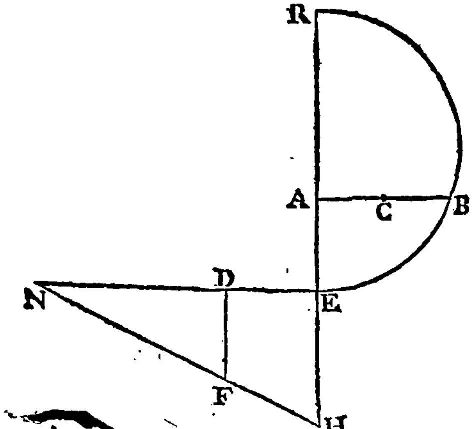


DIvidantur rectæ AB, DF, bifariam in C, & O: junctaque CO ſecante rectam AE productam, ſi opus ſit, in G; cadat in eandem productam normalis OI; quæ æqualis erit DE, ut patet. Erit itaque, ex hypotheſi, ut OI, ad AC, ita AB ad DF. Sed ut OI, ad AC, ita OG, ad GC; ob ſimilitudinem triangulorum OGI, AGC: Igitur ut AB, ad DF, ita reciprocè OG ad GC. Sunt autem rectæ DF, AB, appenſæ centraliter in O, & C: Igitur punctum G, eſt ipſarum centrum gravitatis. Quod erat, &c.

Hoc Lemmate ſic uti poſſumus. Sint duæ rectæ æquales NE, ER, angulo recto junctæ in E; & producta RE, in H, donec EH, ſit ejuſdem ſubdupla; jungatur NH: deindè deſcribatur ſuper diametro RE, ſemicirculus RBE. Dico centrum æquilibrii ſemicirculi, & trianguli NEH, eſſe in recta RE.

Sumantur in EN, ER, æquales ED, EA; & in ſemicirculo applicetur AB, in triangulo verò ducatur DF, parallela EH.

Quoniam rectangulum RAE, æquale eſt quadrato AB, ob circulum; erit etiam eidem quadrato æquale rectangulum NDE, ex hypotheſi. Sed rectangulum NDE, duplum eſt rectanguli FDE, cum ND ſit dupla DF, ob parallelas: igitur rectangulum FDE, ſubduplum erit quadrati AB; hoc eſt, ſectâ AB bifariam in C, æquale erit rectangulo



rectangulo BAC. Erit igitur, ut AB, ad DF, ita DE, ad AC. Itaque ex præcedenti Lemmate, centrum gravitatis rectarum A B, D F, erit in recta A E.

Hoc autem contingere evidens eſt, ubicumque ſumantur in rectis EN, ER, puncta D, & A; dummodò æquales ſemper fuerint ED, & EA: & ob eaſdem ſemper æquales, eſt etiam æqualitas tranſitus; igitur ex methodo indiviſibilium, omnium AB, ſivè ſemicirculi, & omnium DF, ſivè trianguli NEH; centrum æquilibrii eſt in recta R E. Quod erat, &c.

Itaque ut ſemicirculus ad triangulum; ita recta quæ cadit ex centro gravitatis trianguli, normalis ad R E, ad eam quæ cadit ex centro gravitatis ſemicirculi, normalis ad eandem RE. Cùm verò nota ſit menſura trianguli, & pariter recta, quæ cadit ex ejus centro gravitatis in R E, utpotè quæ ſit ſubtripla ipſius N E; ſi daretur ſemicirculi dimenſio, daretur ejuſdem centrum gravitatis; & contrà.

Modus autem inveniendi alia exempla facilis eſt. Nam in terminis Analyticis recta E N, ſivè E R, data, dicatur *b*.

ED, vel E A, ſumta ad libitum, *a*.

DF, *y*.

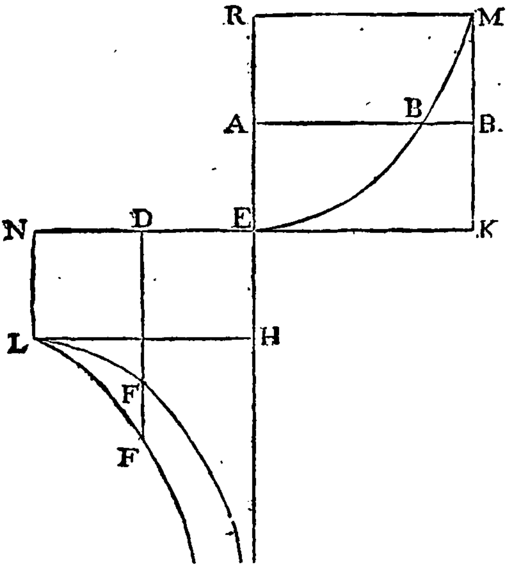
AB, *e*.

Quæcumque tandem figuræ deſcriptæ intelligantur, cum conditionibus in Lemmate expreſſis; duplum rectangulum EDF, ſivè $2ay$ ſemper æquabitur quadrato AB, ſive ee. Itaque ſi ſciatur y, ſivè proprietas figuræ N H E, non ignorabitur e, ſivè proprietas figuræ R B E: ſubſtituendo nempè in æquatione alterutrius valorem applicatæ alterius.

In hoc exemplo, ſi datum ſupponatur triangulum, erit DF, ſivè y, æqualis $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Hoc igitur æquabitur $\frac{ee}{2a}$, ſivè $ba - aa \parallel ee$. Recta

itaque

itaque e, ſivè A B, applicata eſt in ſemicirculo, cujus diameter b, ſivè E R. Si datus ſupponeretur ſemicirculus, fieret $ba - aa \| ee$; & cùm ee ſit $2ay$, $ba - aa$ æquaretur $2ay$, ſivè $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a \| y$, quæ proprietas eſt trianguli quod deſcripſimus, ut patet.



Ponamus nunc perfici rectangulũ NEHL & circa EH, & EN, aſymptotos, per punctum L, deſcribi hyperbolam L F. Itaque duplum rectangulum E D F, ut prius, æquale erit quadrato AB, ſivè $2ay \| ee$. Cùm autem rectangulum EDF ſit æquale rectangulo EH L, ſivè $\frac{1}{2}bb$; erit $2ay \| bb$: & per conſequens $bb \| ee$, ſivè $b \| e$. Recta igitur AB ſemper æqualis erit ER. Itaque facto ſuper ER, quadrato RMKE, punctum B, rectæ AB, ſemper erit in recta MK; & ſpatii infiniti hyperbolici ac quadrati, centrum æquilibrii erit in rectâ R E. Et cùm quadratum ejuſque gravitatis centrum data ſint, ſi daretur in lineâ E N centrum æquilibrii ſpatii hyperbolici, daretur ejus dimenſio & contrà.

Exiſtimo autem ſatis collligi ex demonſtratione Lemmatis, centrum æquilibrii partium proportionalium quarumcumque, ut ſunt N D F, R A B, eſſe etiam in eadem recta R E. Itaque ſi daretur vel centrum æquilibrii ſpatii NDFL, vel ejus dimenſio daretur alterum: cùm notum ſit parallelogrammi R A B M centrum æquilibrii, ejuſque data ſit menſura.

Supponatur modò curvam LF, non eſſe ſimplicem hyperbolam, ſed aliam quandam ex infinitis: illam exempli gratiâ, in quâ ſumto quolibet puncto D, & applicatâ DF, eadem eſt ratio NE, ad DE, quæ

quadrati

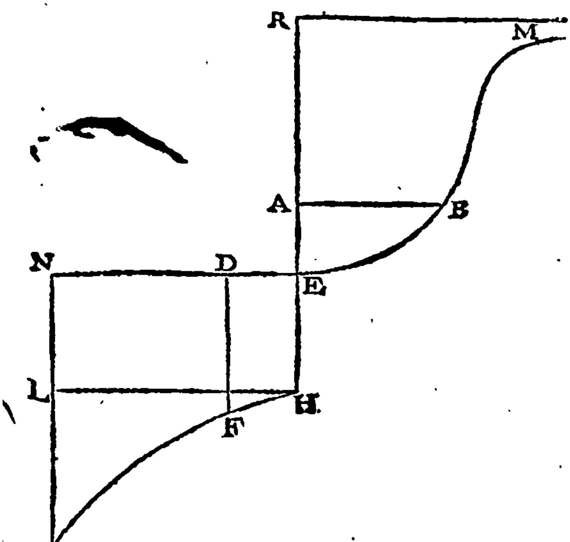
quadrati DF, ad quadratum NL. Erit in terminis analyticis.

$\frac{3}{4} b^3 \parallel ayy$. Sivè ductis omnibus in a, $\frac{3}{4} b^3 a \parallel aayy$.

Cùm autem ay perpetuò æquale ſit $\frac{3}{2} ee$: erit etiam $aayy$, æquale $\frac{3}{4} e^4$. Itaque loco $aayy$ poſito in ſuperiori æquatione ejus valore fiet

$\frac{3}{4} b^3 a \parallel \frac{3}{4} e^4$. Sivè $b^3 a \parallel e^4$.

Recta igitur AB, hoc caſu, erit applicata ſemiparabolæ, vertice E axe ER deſcriptæ, in quâ RE, ad AE, habeat eandem rationem, quam quadrato quadratum RM, ad quadrato quadratum AB. Cuius ſemiparabolę cùm detur menſura & centrum æquilibrii in recta RM; ex datâ ſpatii hyperbolici menſurâ, datur etiam centrum æquilibrii ejuſdem, & contrà.



Intelligatur nunc poſito eodem rectangulo NEHL, & normali ER, non jam per punctum L, ſed per punctum H, circa aſymptotos EN, NL, deſcripta eadem hyperbola. Denominatis ut prius, partibus, quoniam nunc ſolidum ex N D, in quadratum DF, æquatur ſolido ex NE, in quadratum EH, erit in terminis analyticis, $byy - ayy \parallel \frac{3}{4} b^3$ & $yy \parallel \frac{\frac{3}{4} b^3}{b-a}$ & $aayy \parallel \frac{\frac{3}{4} b^3 aa}{b-a}$.

Cùm verò ay æquale ſit $\frac{3}{2} ee$, erit $aayy \parallel \frac{3}{4} e^4$; & $\frac{3}{4} e^4 \parallel \frac{\frac{3}{4} b^3 aa}{b-a}$, ſivè $be^4 - ae^4 \parallel b^3 aa$.

Quæ æquatio oſtendit proprietatem curvæ, ad quem eſt punctum B: nimirùm eſſe ſemper, ut $b-a$, ſivè RA, ad b, ſivè RE; ita productum ex bb, in aa, ſivè ex quadrato RE, in quadratum AE, ad e^4

ſivè quadrato quadratum rectæ AB; ubicumque ſumatur punctum A.

Ex datâ igitur ſpatii hyperbolici infiniti NEHF menſurâ, ejuſque centro æquilibrii; ſi daretur in recta RM parallela NE centrum æquilibrii ſpatii REB jam deſcripti, daretur etiam ejus dimenſio & contrà.

Obſervandum eſt autem, rectam RM in infinitum productam, eſſe aſymptoton curvæ EB, ut patet ex ejus deſcriptione; cùm applicatæ AB, creſcant in infinitum, quo propius accedunt ad punctum R.

Obſervandum quoque, tam in hoc exemplo, quàm in aliis quæ ex Lemmate deduci poſſunt; ſolida orta ex revolutione figuræ applicatæ ad NE, circa NE; æqualia eſſe ſolidis ortis ex revolutione figuræ applicatæ ad RE, circa ipſam RE. Id enim evidens eſt methodo indiviſibilium: cùm duplum rectangulũ EDF, ſit ſemper ęquale quadrato AB ex hypotheſi; ideòque ſuperficies cylindrica orta ex revolutione rectæ DF, circa EH, ſemper æqualis ſit circulo deſcripto ex radio AB. Undè ſequitur omnes ſuperficies cylindricas ſimul, ſivè ſolidum ex revolutione figuræ NEHF, circa EH; æquales eſſe omnibus circulis ſimul, ſive ſolido ex revolutione figuræ REB circa RE: idemque obtinet in eorum partibus proportionalibus.

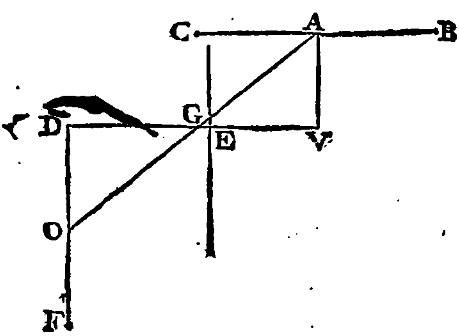
Cùm autem, in hoc exemplo, curva EB in infinitum extendatur ſecundùm aſymptoton RM; erit ſolidum: ex ejus revolutione, circa ER, genitum, infinitæ latitudinis; æquale, ut oſtendimus, ſolido ex revolutione ſpatii hyperbolici circa EH; cujus dimenſio habetur ex notâ ſpatii ejuſdem menſurâ, & centro æquilibrii in rectâ EN. Quod quidem animadverſione dignum videtur.

Eadem omnia applicari poſſunt infinitis aliis ſpatiis hyperbolicis, ſed calculus adeò facilis eſt, ut monuiſſe ſufficiat.

LEMMA

LEMMA QUARTUM.

In rectâ DV, ſectâ utcumque in E, ſi erigatur ex V, normalis quælibet VA, & ducatur per punctum A, recta CAB, biſecta in A, & parallela EV: demittatur autem ex D, normalis DF, ita ut ſit eadem ratio CB, ad DF, quæ DE, ad EV; rectarum CB, DF, centrum æquilibrii, erit in rectâ, quæ per E, tranſit, normalis ad DV.

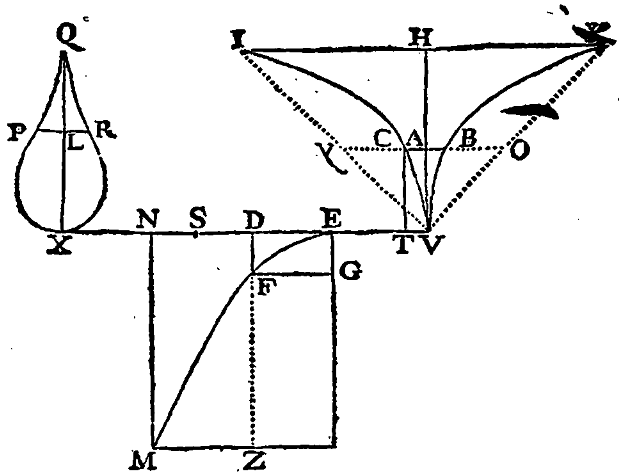


DIvidatur DF bifariam in O, & jungatur OA: tum ex E, ducatur normalis ad DV, occurrens OA, in G.

Patet, ob parallelas DO, EG, AV, ita eſſe OG, ad GA, ut DE ad EV: hoc eſt ex hypotheſi, ut CB ad DF. Itaque, ut OG, ad GA, ita reciprocè CB, ad DF. ſunt autem rectarum CB, DF, centra gravitatis, A, & O: igitur centrum æquilibrii ipſarum eſt punctum G. Quod erat, &c.

Ut uſus Lemmatis appareat, detur quælibet recta NE; & per punctum E, ducatur ad illam normalis indefinita EG. Tum vertice E, axe EG, latere recto NE, deſcribatur ſemiparabola EFM, occurrens normali demiſſæ ex N, in puncto M: erit NM æqualis NE, ut patet. Deindè in recta NE productâ utcumque, ſumatur quodlibet punctum V; erectaque VH, æquali NE; ducatur per H, recta IHK, parallela EV: ac vertice V, axe VE, deſcribatur parabola cubica VCI, in quâ ſcilicet cubus applicatæ cujuſlibet, æqualis ſit ſolido ex parte axis in duplum rectangulum NEV. Occurrat autem hæc parabola rectæ KHI, in I; & eidem æqualis, in contrarias partes, de-

 ſcripta



ſcripta intelligatur VBK, occurrens eidem KHI, in K.

Dico centrum æquilibrii trilineorum NEM, IVK eſſe in rectâ GE.

In ſemiparabolâ EFM, ſumto quolibet puncto F, cadant ab illo in rectas EN, EG, normales FD, FG: erit quadratum FG, ſivè DE, æquale rectangulo NEG, ſivè NE, in DF. Et ſumtâ communi altitudine DE, cubus DE æqualis erit ſolido ex tribus NE, DF, DE.

Sumatur in VH, recta VA, æqualis ED: & per A, ducatur recta CAB, parallela IK, occurrens utrique parabolæ cubicæ in C & B. Erit CA, æqualis CB, ob æqualitatem ſemiparabolarum: demiſsâque ex C in EV, normali CT, erunt etiam rectæ CT, AV, & CA, TV æquales.

Nunc, cubus CT, vel VA, vel DE, æqualis eſt ſolido ex duplo rectangulo NEV, in TV vel CA, ex conſtructione. Eſt autem cubus DE, oſtenſus æqualis ſolido ex tribus NE, DF, DE: igitur ſolidum ex duplo rectangulo NEV, in CA, æquale erit ſolido ex tribus NE, DF, DE. Et ablatâ communi altitudine NE, factum ſub duplâ EV in CA, ſivè ſub EV in duplum CA, vel in CB, æquale erit producto, ex DF, in DE: erit itaque, ut DF, ad CB, ita EV, ad ED. Rectarum

igitur

igitur DF, & CB, centrum æquilibrii eſt in rectâ EG, ex Lemmate quarto. Hoc autem ſequetur ubicumque ſumantur puncta D, & A, dummodò æquales ſint rectæ ED, VA: patet itaque eadem methodo quâ ſuprà uſi ſumus in applicatione Lemmatis tertii, centrum æquilibrii figurarum NEM, & IVK, eſſe in rectâ EG. Quod erat, &c.

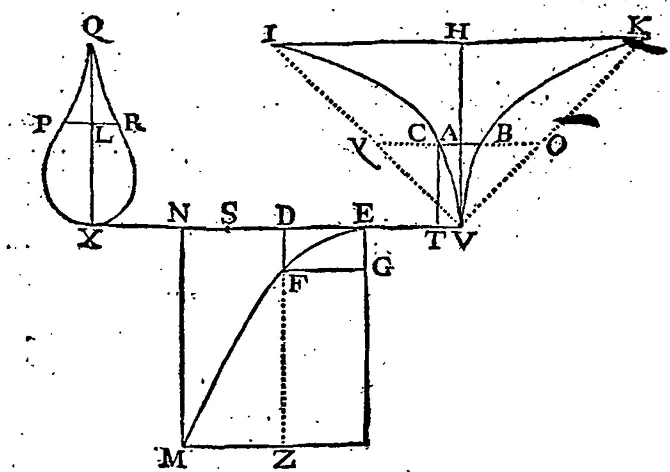
Hac methodo, cuilibet figuræ datæ appenſæ ad NE, dari poteſt æqualis, aut ſaltem quæ ad ipſam habeat rationem datam, ſi ejuſdem figuræ applicatæ ad NE, datum ſit centrum æquilibrii in recta NE. Omni verò caſu, ſivè datum ſit idem centrum, ſivè non, inveniri duæ poſſunt, quæ inter ſe eandem rationem habeant, quam habent partes ipſius NE, ſectæ in puncto æquilibrii.

Ponatur enim centrum æquilibrii trilinei NEM, eſſe punctum S. Evidens eſt, centrum gravitatis trilinei IVK, eſſe in recta VH, cum hæc dividat omnes applicatas, ut IK, CB, bifariam. Itaque recta, quæ ab ejus centro gravitatis cadit normalis ad GE, æqualis eſt EV. Cùm autem oſtenſum ſit, in eadem GE, eſſe centrum æquilibrii trilineorum IVK, NEM; patet eſſe, ut trilineum NEM, ad trilineum IVK, ita reciprocè VE, ad ES. Eſt autem VE, data cùm ſumatur ad libitum: itaque ſi detur etiam ES, data quoque erit ratio trilineorum. Et cum EV ſumatur ad libitum, atque ideò ſumi poſsit æqualis BS; evidens eſt, eo caſu quo ſumetur æqualis, trilinea NEM, IVK fore æqualia.

Nunc, ſivè datum ſit, ſivè non, punctum S; producatur EN in X, donec NX, ſit æqualis EV: erectaque XQ, æquali & parallela VH; ſumatur in eâ XL æqualis ND. Tum fiat, ut XN, ad ND, ita DF, ad PLR, parallelam XN, & ſectam bifariam in L. Sumtiſque aliis punctis ad libitum, quemadmodum accepta ſunt D & L, (dummodò diſtantiæ ab N & X, ut hic DN, LX, ſint ſemper æquales inter ſe) ita ſemper fiat, donec per puncta PR ſic inventa, duci poſſit curva, qualis eſt in hoc exemplo QPXRQ.

Dico ſpatium QPXRQ, ad trilineum IVK, eſſe ut NS, ad SE.

Nam, ex conſtructione, clarum evadit centrum æquilibrii ſpatii QPXRQ, & trilinei NEM, eſſe in rectâ NM; cùm PLR, & DF, ſumtæ ad libitum, habeant conditiones in Lemmate quarto præſcriptas: & demonſtrari poteſt eodem modo, quo proximè



oſtenſum eſt æquilibrium trilineorum NEM, IVK eſſe in recta GE.

Patet etiam ejuſdem ſpatii QPXRQ centrum gravitatis, eſſe in rectâ XQ, dividente biſariam omnes applicatas, quarum una ex PR, ex conſtructione. Itaque; quæ ex centro gravitatis ejuſdem ſpatii cadit normalis ad MN, eſt æqualis XN.

Eſt igitur ex præcedenti demonſtratione ut trilineum NEM, ad ſpatium QRXPQ; ita XN, ad NS: ſivè, ſumtâ communi altitudine NE, ita rectangulum XNE ad rectangulum ENS. Et permutando, ut trilineum NEM ad rectangulum XNE, ita ſpatium QRXPQ, ad rectangulum ENS.

Sed ſuprà oſtenſum eſt, ita eſſe trilineum NEM ad trilineum IVK, ut VE, ad ES: ſivè, ſumtâ communi altitudine EN, ut rectangulum VEN, ad rectangulum NES. Erit igitur permutando, ut trilineum NEM, ad rectangulum VEN, ita trilineum IVK, ad rectangulum NES. Sed rectangulum VEN, eſt æquale rectangulo XNE, cùm rectæ XN, EV, ſint æquales, ex hypotheſi, & NE ſit eorum communis altitudo: eſt etiam demonſtratum, ut trilineum NEM, ad rectangulum XNE, ſivè VEN, ita ſpatium QRXPQ, ad rectangulum ENS. Igitur, ut idem ſpatium, ad idem rectangulum, ita trilineum

trilineum IVK ad rectangulum NES. Et permutando ut ſpatium, ad trilineum IVK, ita rectangulum ENS, ad rectangulum NES: hoc eſt, demtâ communi altitudine NE; ita NS, ad SE. Quod erat, &c.

Datâ autem proprietate figuræ applicatæ ad NE, facilè inveniuntur proprietates reliquarum, & viciſſim: ſit enim in terminis analyticis

EN, b.
DE, ſive VA, ipſi æqualis, aſſumta ad libitum, a.
DF y.
EV z.
CA, vel AB e.
Igitur CB, erit $2e$.

Quoniam autem, ex hypotheſi, eſt ſemper ut VE, ad ED, ſive z, ad a, ita DF, ad CB; quæcumque figura applicata ſupponatur ad NE, erit ſemper æquatio, $ay \parallel 2ze$, & $\frac{2ze}{a} \parallel y$.

Itaque ſi ex figuræ proprietate detur valor ipſius y, perpetuò æquabitur $\frac{2ze}{a}$.

In hoc exemplo, quoniam rectangulum NEDF, æquale eſt quadrato DE, ex proprietate parabolæ EFM; erit in terminis analyticis æquatio $by \parallel aa$, & $y \parallel \frac{aa}{b}$. Igitur $\frac{2ze}{a}$, æquabitur $\frac{aa}{b}$, & $2zbe \parallel a^3$. Itaque e, ſivè AC, vel AB, datur; eſtque punctum C vel B, ad parabolam cubicam quam deſcripſimus.

Eodem modo inveniuntur proprietates curvæ QRX. Nam XL, eſt $b-a$, cùm ſit æqualis ND: & XN, z cum ſit æqualis EV, ex hypotheſi.

Sit nunc LR, v, PR, $2v$. Itaque cùm ſit ut XN, ad ND, ita perpetuò DF, ad PR; erit, ut z, ad $b-a$, ita y, ad $2v$: & æquatio $y \parallel \frac{2zv}{b-a}$.

Valor autem y, ob parabolam, erat $\frac{aa}{b}$, erit igitur æquatio indicans proprietatē curvæ QRX, $\frac{2zv}{b-a} \parallel \frac{aa}{b}$, ſivè $2bzv \parallel baa - a^3$.

Proprietas

Proprietas itaque curvæ X R Q, vel X P Q, hæc eſt; ut ſit ſemper eadem ratio rectanguli ex Q X, ſivè b in duplam X N, ſivè 2 Z, ad quadratum Q L, ſivè aa; quæ eſt X L, ſivè $b-a$, ad L R, vel LP. ſivè v.

Innumera exempla formari poſſunt ad hunc modum, etiam in lineis infinitis, ſeu quæ habent aſymptotos, prout ad Lemma tertium fecimus: ſed iis ſuperſedeo cùm ſatis obvia ſint.

Addo tantùm, opus non eſſe, ut recta DF, adhæreat ipſi NE, dummodò ſit in normali, quæ per punctum D tranſit. Uti nec opus eſt etiam ut rectæ C A, A B jungantur: dummodò ſint æquales inter ſe, & parallelæ rectæ E V, ac in diſtantiâ æquali à puncto A, in axe V H aſſumto. Hoc eſt, poſitis æqualibus E D, V A ſufficit, ut ſit eadem ratio V E, ad E D, quæ eſt cujuſlibet partis normalis per punctum D tranſeuntis, ad duas æquales, & parallelas E V; quarum centra jungantur à rectâ per A tranſeunte & biſectâ in A. Evidens enim eſt demonſtrationem Lemmatis hunc etiam caſum complecti.

In hoc ipſo ſchemate, producatur DF, donec cum normali ex puncto M, in EG productam, cadente concurrat in Z. Deindè ducantur rectæ VI, VK, quibus occurrat CB, vtrimque producta in Y & O: & ſupponatur recta EV ad libitum aſſumta, æqualis eſſe dimidiæ EN. Reliquis, ut prius, poſitis, dico ſemiparabolam E F M G E, & utrumque ſpatium ſimul ſumtum I C V I, & V B K V, habére centrum æquilibrii in rectâ EG: & per conſequens ſemiparabolam ad utrumque ſpatium, eſſe ut V E, ad illam, quæ è centro gravitatis ſemiparabolæ cadit in E G.

Suppoſitâ eâdem denominatione, quæ prius, F Z ſit y. D F erit $b-y$; & rectangulum ex NE, in DF, $bb-by$: quod ex proprietate parabolæ, æquale eſt quadrato FG vel DE, ſivè aa. Itaque ductis omnibus in a, fiet æquatio $bba-bay \parallel a^3$.

Quoniam verò, ex proprietate parabolæ cubicæ, ſolidum ex duplo rectangulo EVH, in HI, ſit æquale cubo HV: cùm ſuppoſuerimus duplam EV, æquari VH, erit duplum rectangulum EVH, æquale quadrato VH. Itaque quadratum VH, in HI, æquabitur cubo HV; & per conſequens VH, & HI ſunt æquales.

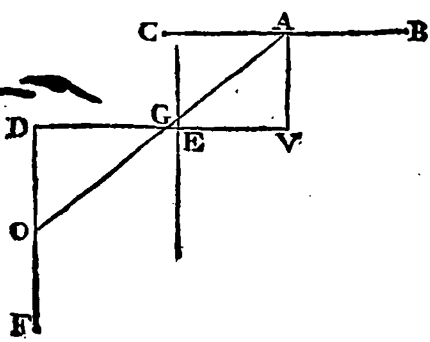
Igitur æquales etiam ſunt VA, & AY, vel AO: & ſi VC, vel BO, dicatur e, erit AC, vel AB, $a-e$. Et in terminis analyticis, erit

æquatio

æquatio, $bba - bbe \parallel a^3$. Sed a^3, eſt $bba - bay$: igitur, $bba - bbe \parallel bba - bay$. Hoc eſt $ay \parallel be$. Eſt igitur, ut $\frac{2}{3}b$, ſivè VE, ad a, ſivè ED; ita y, ſivè FZ, ad ze, ſivè ad utramque YC, BO. Undè facilè oſtenditur ipſarum YC, BO, & FZ, centrum æquilibrii eſſe in normali, quæ per E tranſit: & per conſequens ſpatiorum ICVI, & KBVK ſimul ſumtorum, ac ſemiparabolæ EFM. Et ita eſſe ſemiparabolam ad ſpatia, ut EV, ad illam, quæ è centro gravitatis ſemiparabolæ cadit in axem EG.

Quæ omnia in partibus proportionalibus etiam locum habere ſatis, ut exiſtimo, colligitur ex demonſtratione.

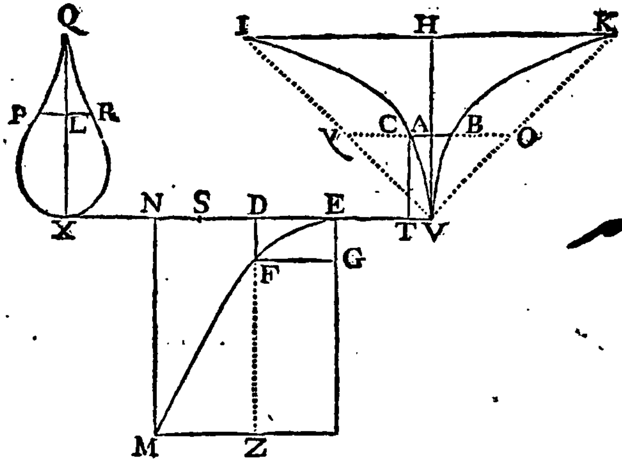
Et hactenus quidem de figuris planis. Cæterùm eadem ſuo modo accommodari poſſunt ſolidis.



Nam repetito ſchemate hujus Lemmatis quarti, intelligatur in AC quælibet figura plana normaliter erecta, cujus & plani DEA, communis ſectio ſit AC, axis ejuſdem figuræ. (exempli gratiâ intelligatur ſemicirculus centro A, radio AC deſcriptus.) Cui opponatur ex adverſo figura ſimilis & æqualis, itaut commune ipſarum centrum ſit punctum A. (nimirùm in hoc exemplo, alter, ſemicirculus eodem centro, & radio AB, æquali AC deſcriptus) Deindè intelligatur ſuper rectâ DF, erecta alia figura ſimilis, cujus axis ſit in eadem DF. Nempè (in eodem exemplo) ſemicirculus; quem centro D, radio DF, deſcriptum nunc ſupponemus. Dico ſi fuerit eadem ratio quadrati DF, ad duo quadrata AC & AB; quæ eſt VE, ad ED: centrum æquilibrii ſemicirculi, cujus radius DF, & ſemicirculorum, quorum radii AC, AB, vel circuli cujus diameter CB; eſſe in recta GE. Quod quidem evidens eſt, ductâ rectâ ex A, ad punctum O, centrum ſemicirculi cujus radius D, ſecante rectam EG, in G. Patet enim, ubicumque tandem ſit punctum O, ita eſſe OG, ad GA, ut DE, ad EV; hoc eſt, ex hypotheſi, ut duo

 quadrata

quadrata AC, & AB, ad quadratum DF. Sed ut duo quadrata AC & AB, ad quadratum DF, ita duo ſemicirculi ex radiis AC, & AB, deſcripti, ſivè circulus cujus diameter CB, ad ſemicirculum radio DF deſcriptum. Igitur ut circulus, ad ſemicirculum, ita reciprocè OG, ad GA, & cùm tam circulus, quàm ſemicirculus, ſint centraliter appenſi, patet G eſſe centrum æquilibrii ipſorum.



Uſum Lemmatis oſtendamus aliquot exemplis. Sit igitur ſemiparabola EFM, & ex illâ ac rectis EN, NM, trilineum ENM; ex cujus dimidia revolutione circa NE, factus intelligatur ſemiconicus, qui per quodlibet punctum axis ut D, plano baſi parallelo ſectus, det ſemicirculum, cujus radius, eundem ſemicirculum biſecans, ſit DF; & productâ DE, utcumque in V, erectaque VH, æquali NE, deſcribatur ſemiparabola VCI, cujus vertex V, axis VE; & in quâ quinta dignitas applicatæ cujuſlibet, ut CT, æqualis ſit producto ex quadrato TV, in ſolidum ex quadrato EN, in duplam EV. Tum ex ſemiparabolæ revolutione circa VH, factus intelligatur conicus, cujus ſectio per axem ſit ICVBK. Dico conici IVK; & ſemiconici NEM, centrum æquilibrii eſſe in rectâ GE.

Denominatis, ut priùs, partibus; quoniam rectangulum ſub NE, DF,

DF, æquale eſt quadrato DE, ob parabolam, erit $by \parallel aa$, & $a^4 \parallel bbyy$, ac rurſus $a^5 \parallel bbayy$.

Quoniam autem quinta dignitas CT, ſivè a^5, æqualis eſt producto ex quadrato TV, ſivè ee, in ſolidum ex duplâ VE, & quadrato NE, ſivè $2zbb$, ex conſtructione: erit æquatio, $a^5 \parallel 2zbbee$.

Eſt autem oſtenſum, a^5 eſſe æquale $bbayy$: Igitur $bbayy$ æquaquabitur $2zbbee$: ſivè $ayy \parallel 2zee$. Eritque ut z, ad b, ita yy, ad $2ee$. Hoc eſt ut EV, ad ED, ita quadratum DF, ad duplum quadratum CA, ſivè ad duo quadratâ CA, AB.

Eſt autem ut quadratum DF, ad quadratum CA, ita ſemicirculus ex radio DF, ad ſemicirculum ex radio CA: & ut quadratum DF, ad duplum quadratum CA, ita ſemicirculus ex radio DF, ad duos ſemicirculos ex radio CA, hoc eſt ad circulum, cujus diameter CB. Igitur ut EV, ad ED, ita reciprocè ſemicirculus cujus radius DF, ad circulum cujus diameter CB. Itaque cùm ſemicirculus in DF ſit centraliter appenſus, ex hypotheſi: itemque circulus cujus diameter CB, centrum habeat in A; ſequitur in recta GE eſſe centrum æquilibrii ipſorum.

Cùm autem idem de omnibus ſemicirculis ſemiconici ENM, & de omnibus circulis conici IVK demonſtrari poſſit (ſumtis nimirùm ſemper æqualibus ad libitum rectis ED, VA) patet ſemiconicum, ad conicum, eſſe ut VE, ad ES, ſi punctum S ſit centrum æquilibrii ſemiconici.

Si ab aliâ parte producatur EN in X, ita ut NX ſit æqualis EV, & erecta XQ, æquali NE; axe XQ deſcripta intelligatur curva QRX, cujus ea ſit proprietas ut applicatâ qualibet RL, productum ex LX, in quadrato quadratum LQ, æquale ſit producto ex quadrato LR, in ſolidum ex dupla XN in quadratum NE: eodem modo oſtendetur, eſſe ut XN, ad NS, ita reciprocè ſemiconicum MEN, ad ſolidum ortum ex revolutione ſpatii QRX, circa QX.

Nam ſumtâ XL, æquali DN, & applicata LR, hæc dicatur v. Cùm itaque, ex conſtructione, LQ ſit a, & LX $b-a$: erit ex proprietate lineæ QRX, æquatio $ba^4 - a^5 \parallel 2zbbvv$: ſivè

$$\frac{a^4}{bb} \parallel \frac{2zvv}{b-a}$$

Cùm autem, ob parabolam EFM, ſit æquatio $by \parallel aa$, ſivè $\frac{a^4}{bb}$

 yy

$\parallel yy$: poſito in ſuperiori æquatione loco $\frac{a^4}{bb}$ cujus valore fiet $yy \parallel \frac{2zvv}{b-a}$ ſivè $byy - ayy \parallel 2zvv$.

Erit igitur ut z, ſivè XN, ad $b-a$, ſivè N D, ita yy, ſivè quadratum DF, ad $2vv$, ſivè duo quadrata LR. Vndè reliqua ſequuntur, ut prius.

Hinc infertur, id quod de planis ſuprà diximus, locum etiam habere in ſolidis: Nimirùm dato quolibet ſolido, orto ex revolutione cujuſlibet figuræ planæ circa axem, dari ſolidum ipſi æquale, vel quod ad ipſum rationem habeat datam, ſi centrum gravitatis ſolidi dati pariter datum ſit. Seu verò datum fuerit ſivè non, inveniri ſaltem hac methodo duo ſolida, quæ inter ſe eam rationem habeant, quam partes axis ſolidi dati, ſectæ à centro gravitatis.

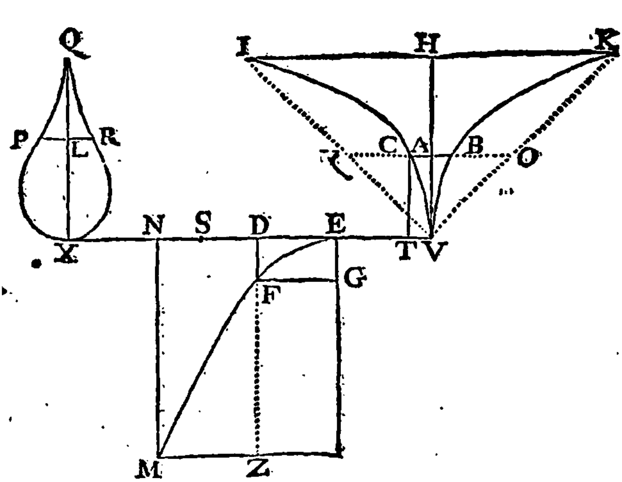
Poſito enim puncto S, centro æquilibrii ſemiconici E N M, vel centro gravitatis conici orti ex revolutione trilinei ENM circa NE; facilè demonſtratur, eodem modo, quo ſupra in planis uſi ſumus, ita eſſe conicum IVK, ad ſolidum Q R X P, ut E S, ad S N.

Quoniam autem EV, vel NX, ſumitur ad libitum; ſi ſumatur æqualis dimidiæ NE, ut $2z$ ſit æqualis b, ſequetur ita eſſe NE ad ES, ut conicus ex revolutione trilinei NME, circa NE, ad conicum ex revolutione trilinei IVH, circa VH, & ita eſſe NE, ad NS, ut idem conicus ex revolutione trilinei NME, ad ſolidum ex revolutione figuræ Q R X circa Q X.

Quod evidens eſt, cùm oſtenderimus conicum IVH, exempli gratiâ, ad dimidium conici MEN eſſe ut SE, ad EV. Erit igitur, ſumtis conſequentium duplis conicus IVH, ad conicum MEN, ut SE, ad duplum EV, ſivè ad EN, ex hypotheſi. Juvat autem hoc ſupponere, ut integra integris comparentur, & ratio axis, ad partem ejus ſectam á centro gravitatis continuò habeatur.

Breviſſimè verò ſic inveniri poſſunt alia exempla. Denominatis, ut priùs partibus, erit ſemper æquatio pro CA, ſivè ee, $\frac{bee}{a} \parallel yy$ quęcumque tandem figura applicata intelligatur ad NE: pro LR verò, ſivè vv $\frac{bvv}{b-a} \parallel yy$. Itaque, ſi ex proprietate figuræ applicatæ ad NE, nota ſit y; dabuntur pariter proprietates figurarum applicandarum ad axes

HV, & QX. Exempli gratiâ. Conſideretur FZ (in eodem ſchemate) ſivè y, applicata ad baſim ſemiparabolæ EFM. Nam ſicut in planis ita & hic, parum refert an in puncto D applicetur, dummodò ſit in lineâ DF, intelligatur autem eſſe radius ſemicirculi, centro z deſcripti, cujus punctum ſupremum ſit F.



Ex proprietate parabolæ $bb - aa$, æquabitur by; & $\frac{bb - aa}{b} \parallel y$: ſivè $\frac{b^4 + a^4 - 2bbaa}{bb} \parallel yy$. Itaque ſubſtituendo loco yy, ejus valorem $\frac{bee}{a}$, habebitur æquatio indicans proprietatem figuræ applicandæ ad axem VH.

$\frac{b^4 + a^4 - 2bbaa}{bb} \parallel \frac{bee}{a}$. Sivè $b^4 a + a^5 - 2bba^3 \parallel b^3 ee$.

Eodem modo, poſito pro yy ejus valore $\frac{bvv}{b - a}$, prodibit æquatio oſtendens proprietatem alterius figuræ applicandæ ad axem QX,

$\frac{b^4 + a^4 - 2bbaa}{bb} \parallel \frac{bvv}{b - a}$. Sivè $b^5 - b^4 a - 2b^3 aa + 2bba^3 + b$ $a^4 - a^5 \parallel b^3 vv$.

Dato itaque centro gravitatis ſemifuſi parabolici, orti ex revolutione ſemiparabolæ EFM, circa MZ, datur pariter ratio ſolidorum genitorum à prædictis figuris revolutis circa axes VH & QX & contra. Et dato eodem centro, ac ſemifuſi menſura, dantur eadem ſolida.

Poſſumus etiam figuras, quæ aſymptotos habent, hic applicare, ut in planis ſuprà factum eſt. Sit enim circa aſymptotos EN, EG, deſcripta per punctum M, hyperbola cujus proprietas in terminis analyticis exprimitur per $ayy \parallel b^3$. Et ex ejus revolutione circa rectã NE, factum intelligatur ſolidum infinitæ latitudinis, cujus altitudo ſit EN, radius baſis in infinitum productæ, recta EG eodem modo producta.

Igitur ex proprietate hyperbolæ, erit æquatio $\frac{b^3}{a} \parallel yy$.

Itaque pro figurâ applicanda ad axem HV, habebimus

$$\frac{bee}{a} \parallel \frac{b^3}{a} \text{ Sivè } e \parallel b.$$

Pro figurâ applicandâ ad axem XQ,

$$\frac{bvv}{b-a} \parallel \frac{b^4}{a} \text{ Sivè } avv \parallel b^3 - bba.$$

Prima æquatio, cum oſtendat e æqualem b, dat quadratum ſuper recta HV, & ex ejus revolutione cylindrum. Altera indicat aliquam ex infinitis hyperbolis, cujus una aſymptoton ſit QX, alia tranſit per Q ad angulos rectos; ex cujus revolutione fieret ſolidum pariter latitudinis infinitæ.

Si ad axem NE, appenſum intelligeretur ſolidum infinitæ latitudinis, cujus menſuram dedimus ſuprà ad Lemma tertium; daretur hâc methodo ejus centrum gravitatis.

Intelligatur enim aſymptoti curvæ à quâ oritur, rectæ EN, EG, vertex N. Poſita NE, b; qualibet DE, a; & applicata in D, y ex proprietate ejuſdem curvæ, erit æquatio $by^4 - ay^4 \parallel b^3 aa$.

Igitur $\frac{b^3 aa}{b-a} \parallel y^4$.

Cùm autem pro figurâ applicanda ad axem VH, habeamus ſemper $\frac{bee}{a} \parallel yy$, ſivè $\frac{bbe^4}{aa} \parallel y^4$ ſubſtituto pro y^4, ejus valore, fiet

$$\frac{b^3 aa}{b-a} \parallel \frac{bbe^4}{aa}. \text{ Sivè } ba^4 \parallel be^4 - ae^4.$$

Similiter

Similiter pro aliâ applicandâ ad axem X Q ſubſtituendo loco y^4, ejus valorem fiet $\frac{b^3aa}{b-a} \parallel \frac{bbv^4}{bb+aa-2ba}$. Hoc eſt $baa-a^3 \parallel \frac{v^4}{b}$

Prior ex his æquationibus, oſtendit curvam infinitam applicandam ad VH, cujus aſymptotos eſt HI. Conſtruitur autem faciendo ſemper, ut A H, ad HV, ita quadrato-quadratum VA, ad quadrato-quadratum applicatæ in A, ut patet. Alterius verò curvæ applicandæ ad axem Q X, proprietas eſt talis ut applicatâ qualibet LR, productũ ex rectangulo Q X L, in quadratum L Q, ſemper ſit æquale quadrato-quadrato L R.

Solidi autem, quod ex hujus curvæ revolutione circa axem X Q oritur, data eſt menſura, ut infrà oſtendetur: data quoque menſura ſolidi infinitæ laitudinis, cujus axis NE: datur itaque ejuſdem ſolidi centrum gravitatis in axe NE. Eſt enim ut ſæpè oſtendimus, ut hoc ſolidum infinitum, ad aliud circa Q X; ita EN, ad illam, quæ ab N. ducitur ad ejus centrum gravitatis.

Quod autem ſolidi orti ex revolutione curvæ circa Q X cujus proprietas ſuprà inventa eſt in terminis Analyticis $baa-a^3 \parallel \frac{v^4}{b}$, detur menſura ſic oſtenditur.

Intelligatur alia curva deſcripta eodem axe Q X, cujus æquatio ſit
$baa-a^3 \parallel bzz$
applicando ſcilicet z in hâc ultimâ, in iiſdem punctis, in quibus v applicatur in aliâ. Igitur quoniam tam bzz, quàm $\frac{v^4}{b}$, æquantur eidem $baa-a^3$, erunt etiam inter ſe æqualia, & $bbzz \parallel v^4$, ſivè $bz \parallel vv$. Eritque ut b, ad v, ita v, ad z; & ut bb, ad vv, ita b ad z.

Cùm autem id contingat, in quolibet puncto rectæ Q X, ad quod applicabuntur v, & z, patet ita eſſe omnia b, ad omnia z, ut omnia bb, ad omnia vv.

At omnia b, ad omnia z, eandem habent rationem quàm habet quadratum rectæ Q X, ad ſpatium rectâ Q X, & curva cujus applicata ſupponitur z, contentum.

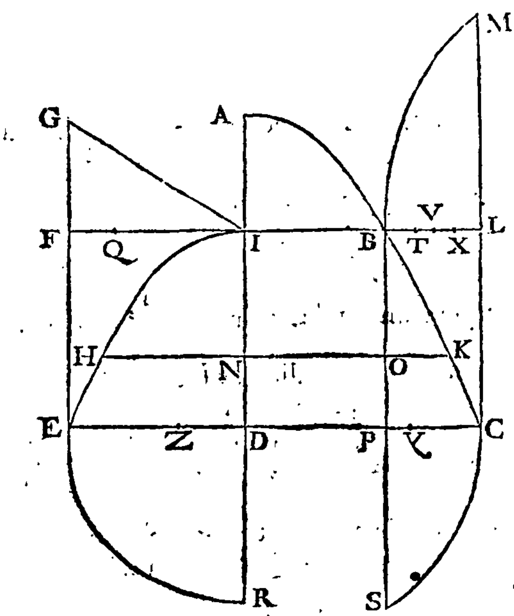
Omnia verò bb, ad omnia vv, eandem habent rationem, quam cylindricus ex revolutione ejuſdem quadrati, ad ſolidum ex revolutione curvæ, cujus applicata ſupponitur v, circa eundem axem Q X: horum enim, indiviſibilium Methodo, obvia eſt demonſtratio.

Itaque ſi detur ratio quadrati, ad ſpatium : dabitur ratio cylindri ad ſolidum. Dari autem rationem quadrati ad ſpatium, evidens eſt ex iis quæ tradidimus Cap. 2. Eſt enim; ex Regulâ ibidem demonſtratâ, eadem quæ 15. ad 4.

Igitur cylindrus ad ſolidum, eſt etiam ut 15 ad 4. Datur itaque menſura ſolidi. Quod erat, &c. Sed de his ſatis.

CAPUT VIII.

De Centro gravitatis Conoidis Hyperbolici.



VErtice A, axe AD, deſcripta intelligatur quælibet ſemiparabola ABC, in quâ applicatâ qualibet IB, & producta utcumque in L, perficiatur rectangulum LCDI, occurrens ſemiparabolæ in angulo C. Deinde, vertice I, axe ID, deſcribatur eodem latere recto, quo prior, ſemiparabola IHE, occurrens CD productæ in E, & perficiatur parallelogrammum EDIF, cadatque ex puncto B, in DC, normalis BP.

Dico ſemiparabolæ IED, & trilinei PBC, centrum æquilibrii eſſe in rectâ ID. Nam ductâ qualibet HNOK, parallela EC, ſecante ſe- [illegible] miparabolas

miparabolas in H, & K, & rectas ID, BP, in punctis N, & O: quadratum KN, minus quadrato NO, æquale erit rectangulo ex latere recto ſemiparabolæ ABC, in BO, ſivè in IN. Eidem autem rectangulo, æquale eſt quadratum HN, applicatæ ſemiparabolæ IHE, cùm utriuſque ſemiparabolæ idem ſit latus rectum, ex hypotheſi; Igitur quadratum NK, minus quadrato NO, æquale eſt quadrato NH. Patet itaque ex Lemmate primo Capitis præcedentis, centrum æquilibrii utriuſque figuræ EHID, & CKBP, eſſe in recta ID. Quod erat, &c.

Ob eandem rationem, centrum æquilibrii utriuſque rectanguli FIDE, & BLCP, erit in eadem recta ID: cùm quadratum CD minus quadrato DP, æquale ſit quadrato DE.

Igitur reſiduorum etiam trilineorum FIE, LBC, centrum æquilibrii erit in eadem recta ID.

Sit itaque trilinei EIF, centrum æquilibrii punctum Q; trilinei verò CBL punctum X. Erit ergò ut trilineum CBL, ad trilineum EIF, ita QI, ad IX.

Nunc, centro I, vertice B, axe BL, deſcribatur quælibet ſemihyperbola BM, occurrens CL productæ in M, & productâ EF utcumque in G, jungatur IG, ut fiat triangulum rectangulum IFG. Deindè ex revolutione hujus trianguli circa FI, & ſemihyperbolæ circa ſuum axem BL, factus intelligatur conus, & conoides hyperbolicum:

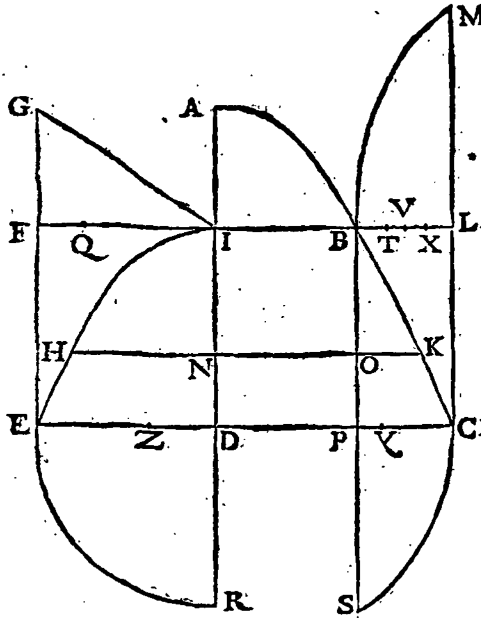
Sæpè oſtenſum eſt, coni centrum fore punctum Q, conoidis verò punctum X. Nam in eadem ratione, in cono & conoide applicantur circuli, ad ejuſdem libræ FI, & BL, puncta quælibet; quâ in trilineis FEI, BCL, applicantur lineæ rectæ.

Ex hac conſideratione, pendet Regula facilis, quam olim dedimus ad inveniendum centrum gravitatis conoidis cujuſlibet hyperbolici. Sumendum nimirùm BT tertiam axis BL, & BV dimidiam ejuſdem axis; deindè ex I centro, faciendum ut IT, ad IV, ita IV, ad IX: punctum enim X fore centrum gravitatis quæſitum.

Demonſtratio hæc eſt, quam facilitatis causâ reducemus ad terminos analyticos

IB vel NO vel DP, ſit b.
FE vel ID vel BP vel LC, ſit d.
BL vel PC, n.
IF vel ED, q.

Cùm quadratum ED, vel qq, æquale ſit, ex conſtructione differentiæ



rentiæ quadratorum; CD, DP; erit æquatio $qq \| 2bn + nn$.

Mutuabimur nunc à Celeberrimo Cavalerio, propoſ. 1. libr. 5. Geometrię indiviſibilium rationem rectanguli BPCL, ad trilineum BCL. Demonſtravit enim cylindrū circumſcriptū conoidi hyperbolico, ex revolutione ſemihyperbolæ BML, ad idem conoides, habere eandem rationem, quam dupla IB cum BL, ad IB cum tertiâ parte BL, ſivè ad IT: hoc eſt, in terminis analyticis, eandem eſſe, quæ $2b + n$, ad $b + \frac{1}{3}n$.

Ut autem cylindrus, ad conoides, ita rectangulum BPCL, ad trilineum LBC, nam in cylindro & conoide eadem eſt ratio circulorum, quæ in rectangulo & trilineo, linearum; ſuntque omnes circuli in cylindro æquales, & omnes rectæ, in rectangulo etiam æquales. Undè methodo Indiviſibilium facilè concluditur rectangulum BPCL, ad trilineum PCL, eſſe ut IB, cum BL, ad IT.

Hoc ſuppoſito, cùm rectangulum BPCL, in terminis analyticis ſit nd; ſi fiat ut $2b+n$, ad $b+\frac{1}{3}n$, ita nd, ad $\frac{bnd + \frac{1}{3}nnd}{2b+n}$. Erit hoc æquale trilineo BLC.

Eſt autem trilineum IFE, æquale tertiæ parti rectanguli IFED; ſivè $\frac{1}{3}qd$, (ob parabolam:) & ex eadem ratione, recta FQ eſt quarta pars rectæ IF; Igitur recta IQ erit $\frac{3}{4}q$.

Nunc recta IX, dicatur y. Erit itaque ut trilineum CBL, ſivè $\frac{bnd + \frac{1}{3}nnd}{2b+n}$, ad trilineum FIE, ſivè $\frac{1}{3}qd$, ita IQ, ad IX; ſivè $\frac{3}{4}q$, ad y.

ad y. Et æquatio, $\frac{1}{4} qqd \parallel \frac{bndy + \frac{1}{3} nndy}{2b + n}$.

Eſt autem qq, ut vidimus, æquale $2bn + nn$. Igitur $\frac{1}{2} bnd + \frac{1}{4} nnd$ æquabitur $\frac{bndy + \frac{1}{3} nndy}{2b + n}$. Sivè, applicatis omnibus ad nd, & factâ multiplicatione ad tollendam fractionem $bb + bn + \frac{1}{4} nn \parallel by + \frac{1}{3} ny$.

Cùm autem $bb + bn + \frac{1}{4} nn$, ſit quadratum à latere $b + \frac{1}{2} n$; patet ita eſſe $b + \frac{1}{3} n$, ad $b + \frac{1}{2} n$, ut hæc, ad y. Quemadmodum in Regula poſueramus.

Obſervandum eſt autem hanc Regulam ſuo modo etiam locum habere in cono. Nam I Q $\frac{3}{4}$ I F, eſt tertia proportionalis, $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{2}$, ejuſdem I F: hoc ſolo diſcrimine, quod puncta I, & B, ſeparata ſint in conoide, quæ in cono in unicum punctum I coaleſcant.

Notandum quoque Regulam huic non abſimilem adaptari hemiſphærio, vel hemiſphæroidi, & partibus ejuſdem. Cùm enim trilinea EID, PBC: centrum æquilibrii communis habeant in rectâ ID; ſumpto Z centro æquilibrii trilinei EDI; & Y, centro æquilibrii trilinei PBC; erit eadem ratio trilineorum inter ſe, quæ reciprocè rectarum ZD, & DY.

Fiat nunc radio DE, quadrans circuli, vel ſemi axe DE, quadrans Ellipſis ER, occurrens ID productæ in R: deindè eodem centro D, ſemiaxe DC, arcus circuli vel Ellipſis CS, occurrens BP, productæ, in puncto S.

Patet, ex ſi revolutione quadrantis ERD, & ſpatii PSC, circa eandem EC genita intelligantur ſolida, eorum centrum gravitatis fore puncta Z & Y.

Id enim eodem modo oſtenditur, quem ſuprà adhibuimus in conò & conoide: cùm hic etiam ad eandem libram EP, vel PC, applicentur in eadem ratione, circuli, in ſolidis, & lineæ, in trilineis.

Itaque ſi dentur trilinea, & centrum æquilibrii in alterutro, dabitur quoque centrum æquilibrii in altero.

Trilineum EIB, in terminis analyticis eſt $\frac{2}{3} qd$. Recta ZD, $\frac{3}{8} m$, ut notum eſt. Quoniam verò ratio rectanguli BLCP ad trilineum CBL, eadem eſt quæ $2b + n$, ad $b + \frac{1}{3} n$; habebit idem rectangulum ad trilineum PBC, rationem $2b + n$, ad $b + \frac{2}{3} n$. Itaque trilinenum PBC, erit $\frac{bnd + \frac{2}{3} n.}{2b + n}$

Undè ſi DY, dicatur e, ſequetur methodo priori, $\frac{bb + bn + \frac{1}{4}nn}{b + \frac{2}{3}n}$ æquari e, & per conſequens tres $b + \frac{2}{3}n$, $b + \frac{1}{2}n$, & e, eſſe continuè proportionales.

Ad inveniendũ itaque centrum gravitatis partis hæmiſphærii, vel hemiſpheroidis, genitæ ex revolutione ſpatii PSC, ſumenda eſt DP cum duabus tertiis PC, & eadem DP cum dimidia PC; tertia enim proportionalis DY, incidet in ipſum punctum Y centrum gravitatis.

Quæ Regula ſuo modo etiam locum habet in hemiſpherio: cùm enim DZ ſit $\frac{3}{8}$ DE, evidens eſt eam eſſe tertiam proportionalem, ad $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{2}$ ejuſdem, & notari etiam poteſt QI ad DZ habere rationem duplam: quemadmodum XI ad YD eandem habet, quæ eſt DP cum duabus tertiis PC, ad eandem DP cum tertiâ parte PC, ſivè ad IT, hoc eſt ut $b + \frac{2}{3}n$ ad $b + \frac{1}{3}n$, ut indicat ſuperior calculus. Undè patet analogia centrorum gravitatis coni & hemiſphærii; uti etiam conoidis hyperbolici, & partis hemiſphæroidis circa ejuſdem axem.

Regula, quam ſuprà explicuimus, ad inveniendum centrum gravitatis conoidis hyperbolici, dat etiam ſolutionem facilem hujus Problematis.

Locum invenire, ad quem ſunt omnia centra conoidum hyperbolicorum, quæ fiunt ab hyperbolis in dato cono recto ſectis, & quarum axes ſint axi ejuſdem coni, paralleli.

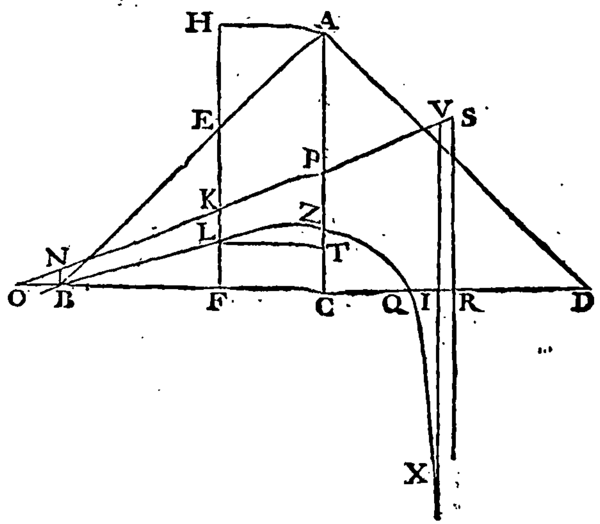
Datus ſit conus, cujus triangulum per axem ſit ABD, axis AC. Secetur in eo quælibet hyperbola, cujus axis EF parallelus AC, vertex E, centrum H; ubi nempè recta FE, occurrit AH parallelæ BD. Intelligatur nunc ex ejuſdem hyperbolæ revolutione circa axem EF, factum conoides cujus centrum grauitatis ſit L.

Igitur ex regulâ ante traditâ, HE cum tertiâ parte EF; eadem HE cum dimidiâ ejuſdem EF; & HL, erunt in continuâ analogiâ: ſeu quod idem eſt HF minus $\frac{2}{3}$ FE; eadem HF minus $\frac{1}{2}$ FE; & HL, erunt continuè proportionales.

Nunc BC, ſit b.

HF, vel CA, d.

BF, a. Ob ſimilitudinem triangulorum BFE, BCA, erit FE, $\frac{da}{b}$. Igitur HF minus $\frac{2}{3}$ FE, erit $d - \frac{2}{3}\frac{da}{b}$.



& HF minus dimidiâ FE, erit $d - \frac{1}{2}\frac{da}{b}$.

FL ſit e: itaque HL erit $d - e$. Et tres $d - \frac{2}{3}\frac{da}{b}$ / $d - \frac{1}{2}\frac{da}{b}$ / $d - e$, erunt continuè proportionales. Habemus igitur æquationem

$$dd - \frac{2}{3}\frac{dda}{b} - de + \frac{2}{3}\frac{dae}{b} = dd + \frac{1}{4}\frac{ddaa}{bb} - \frac{dda}{b}.$$

Sivè ablatis æqualibus, & reſiduo applicato ad d, & ducto in b; factâque metatheſi,

$$be - \frac{2}{3}ae = \frac{1}{3}da - \frac{1}{4}\frac{daa}{b}.$$

Quæ æquatio eſt ad hyperbolam, quam ſic inveniemus. Producatur CB in O, ita ut BO ſit $\frac{1}{6}$ BC: erectâq; normali BN, æquali $\frac{1}{16}$ AC, dividatur CD bifariam in R; & junctâ ON, producatur donec occurrat rectæ FH in K; axi in P; & normali in R erectæ in puncto S. Tum circa aſymptotos SR, SO, deſcribatur hyperbola tranſiens per punctum B: illa ſatisfaciet propoſito.

Nam cum OB ſit $\frac{1}{6}b$, & NB $\frac{1}{16}d$; ſitque ut OB, ad BN, ita OF ſivè $\frac{1}{6}b + a$, ad FK; erit FK $\frac{1}{16}d + \frac{3}{8}\frac{da}{b}$.

Igitur K L, erit $\frac{1}{16}d+\frac{3}{8}\frac{da}{b}-e$. Eſt autem, ob hyperbolam, ut KL ad NB, ita BR, ad FR: ſivè in terminis analyticis

ut $\frac{1}{16}d+\frac{3}{8}\frac{da}{b}-e$, ad $\frac{1}{16}d$; ita $\frac{3}{2}b$ ad $\frac{3}{2}b-a$.

Erit igitur dividendo

ut $\frac{3}{8}\frac{da}{b}-e$, ad $\frac{1}{16}d$; ita a, ad $\frac{3}{2}ba$.

Et æquatio $\frac{1}{16}da \parallel \frac{9}{16}da-\frac{3}{2}be-\frac{3}{8}\frac{daa}{b}+ae$

Sivè ablatis æqualibus, & ducto reſiduo in 2, & applicato ad 3, factâq; metatheſi, $be-e\frac{2}{3}ae \parallel \frac{1}{3}da-\frac{1}{4}\frac{daa}{b}$, quæ conſtruenda proponebatur.

Reliqua patent ex regreſſu per veſtigia Analyſeos. Ex quâ facilè etiam oſtenditur hyperbolam BLZ, occurrere axi AC, in Z, centro gravitatis ipſius coni. Nam cùm NB, ſit $\frac{1}{16}$ AC; ſitque ut RC, ad RB, ſivè 1 ad 3, ex conſtructione, ita, ob hyperbolam, NB, ad PZ, erit PZ, $\frac{3}{16}$ AC.

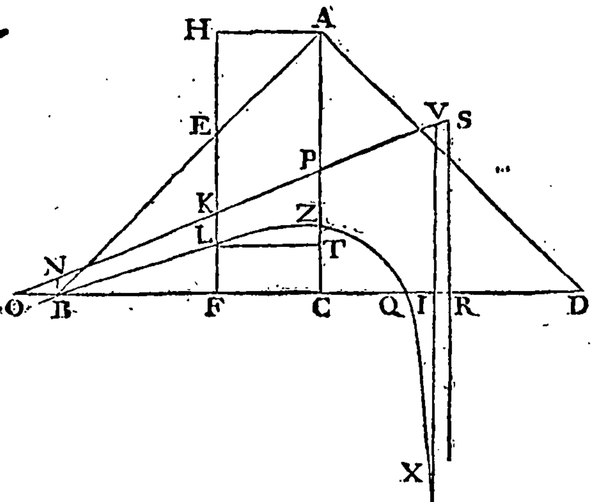
Cùm autem ob ſimilitudinem triangulorum OBN, OCP, ſit ut OB, ad OC, ſivè 1, ad 7, ex conſtructione, ita NB, ad PC; erit PC, $\frac{7}{16}$ AC, igitur ZC, erit ejuſdem A C, pars quarta, ſivè $\frac{4}{16}$.

Hinc ſequitur, ſi ex puncto L, cadat in axem coni, normalis LT; punctum T fore centrum gravitatis ſolidi excavati, quod oritur ex revolutione trianguli EBF circa rectam AC. Cùm enim conoides hyperbolicum, & hoc ſolidum ſint æqualis altitudinis; ſintque etiam æqualia inter ſe, tam in toto, quàm in partibus proportionalibus; evidens eſt ipſorum axes æquales in eadem ratione ſecari à centro gravitatis. Nec opus eſt pluribus in re clarâ inſiſtere.

Si eadem hyperbola BLZ, cujus pars BLZ tantùm húic problemati neceſſaria eſt, produceretur à puncto Z, in infinitum circa aſymptoton SR, occurrens BR in Q; & ſupponerentur etiam rectæ BC, CA æquales: tum pars hyperbolæ infinita QX, utilis eſſet ad ſolutionem Problematis ſequentis.

Datam

Datam rectam BC, ita producere in I, ut vertice B, circa axem B I, facto quolibet conoide hyperbolico; punctum C, ſit ejuſdem centrum gravitatis.



Sumatur enim inter Q, & R, quodlibet punctum I; ex quo ducatur ad hyperbolam recta IX, parallela SR. Dico I X eſſe ſemilatus tranſverſum hyperbolæ, quæ vertice B, axe B I, deſcribenda eſt: & conoides ex ejuſdem hyperbolæ revolutione genitum habiturum centrum gravitatis in puncto C. Hoc eſt, X I cum tertiâ parte BI; X I cum dimidiâ ejuſdem BI; & XI cum BC eſſe in continuâ analogiâ.

BA ſit a; IX, e. Quoniam OB, eſt pars ſexta BC, ex conſtructione; & BN pars decima ſexta AC, ſivè BC, cùm eas æquales nunc ſupponamus. Erit OB, ad BN; ſivè, productâ XI, uſque OS in V, erit OI, ad IV, ut $\frac{1}{6}$ ad $\frac{1}{16}$, ſivè ut 8, ad 3. Cùmque OI ſit $\frac{1}{6}b + a$, erit IV, $\frac{1}{16}b + \frac{3}{8}a$. Igitur VX, erit $\frac{1}{16}b + \frac{3}{8}a + e$.

Eſt autem, ob hyperbolam, rectangulum MBR, ſivè ex $\frac{1}{16}b$, in

$\frac{3}{2} b$; æquale rectangulo VX, in IR, hoc ex $\frac{1}{16} b + \frac{3}{8} a + e$, in $\frac{3}{2}$ $b - a$. Habemus igitur æquationem

$$\frac{3}{32} bb \parallel \frac{3}{32} bb + \frac{9}{16} ba + \frac{3}{2} be - \frac{1}{16} ba - \frac{3}{8} aa - ae,$$

ſivè, ablatis æqualibus, & ductis omnibus in 2, & applicatis ad 3, factâque metatheſi, $\frac{1}{4} aa + \frac{2}{3} ae \parallel \frac{1}{3} ba + be$, & addito utrimque $\frac{1}{3} ae + ee$.

$$\frac{1}{4} aa + ae + ee \parallel \frac{1}{3} ba + be + \frac{1}{3} ae + ee.$$

Eſt autem $\frac{1}{4} aa + ae + ee$, quadratum, cujus latus eſt $e + \frac{1}{2} a$, & $\frac{1}{3} ba + be + \frac{1}{3} ae + ee$, rectangulum ex $e + \frac{1}{3} a$, in $e + b$. Igitur ut $e + \frac{1}{3} a$, ad $e + \frac{1}{2} a$, ita $e + \frac{1}{2} a$ ad $e + d$. Quod erat, &c.

Idem oſtendetur ſumto quolibet puncto inter Q & R. At ſi ſumeretur ipſum punctum Q, tunc IX abiret in nihilum: & loco conoidis hyperbolici circa axem BQ, deſcribendus eſſet conus: cujus centrum foret punctum C. Nam cùm RQ ſit æqualis OB, ſivè $\frac{1}{6} b$; & RC, ſit $\frac{1}{2} b$; ſequitur CQ, fore partem tertiam ejuſdem b, ſivè BC, & per conſequens BC eſſe triplam CQ.

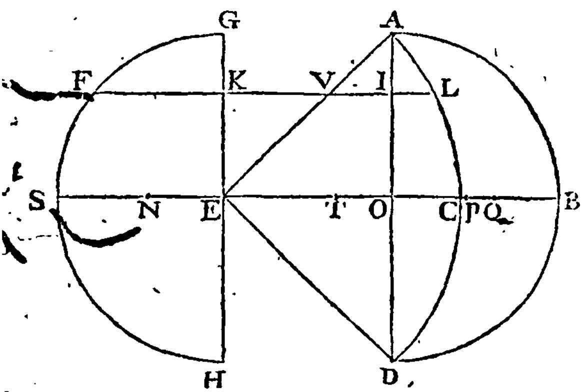
Si verò ſumeretur ipſum punctum R, tunc IX eſſet infinita & pro conoide hyperbolico circa axem BR deſcribi deberet parabolicum cujus centrum eſſet punctum C, cùm BC ſit dupla CR. Ex quibus notari poteſt analogia centrorum gravitatis coni, conoidis hyperbolici, & parabolici.

CAPUT IX.

De centro gravitatis lunulæ Hippocratis Chii.

VT ad quadraturam circuli (quantum exiſtimo) ſibi aliiſque gradum faceret, lunulam quadravit Hippocrates Chius: ſed nullo hactenus ſucceſſu. Rem acu tetigiſſet, ſi non tantùm lunulæ ſuæ quadraturam, verùm etiam ejuſdem centrum gravitatis nos docuiſſet. Hoc enim dato quadraturam circuli haberi demonſtrabimus.

Super



Super AD rectâ biſectâ in O, cētro O fiat ſemicirculus ABD; erectâque normali OB, producatur illa verſus O, donec BO, OE, ſint æquales: deindè centro E, radio EA, vel ED, deſcribatur arcus ACD. Figura inter ſemicirculū ABD, & arcum ACD, comprehenſa, erit lunula Hippocratis, quæ facilè oſtenditur æqualis triangulo AED.

Evidens eſt ejuſdem lunulæ centrum gravitatis eſſe in rectâ EB, dividente omnes illius applicatas bifariam. Sit illud punctum Q.

Dico EQ, æqualem eſſe dimidio circumferentiæ ADB, ſivè quadranti AB vel BD. Ducatur per E recta GEH, parallela & æqualis AD & biſecta in E. Tum centro E, intervallo EG; fiat ſemicirculus GFH, alteri æqualis & oppoſitus; ad cujus circumferentiā producatur BE, in S. Secta erit bifariam circumferentia GFH in S, ut patet. Igitur in ES erit centrum gravitatis ſemicirculi GFH, ſicut in OB alterius ſemicirculi ABD. Sit centrum hujus punctum P, illius verò punctum N, æquales itaque erunt NE, OP.

Nunc, ex quolibet puncto circumferentiæ GSH, ut F, ducatur recta FL, parallela SB. ſecans GH in K, AE in V, AD in I, & arcum ACD in L.

Quoniam quadratum FK, æquale eſt rectangulo HKG (ob circulum) ſivè DIA (ob parallelas;) & eidem rectangulo DIA, æqualis eſt differentia quadratorum LK, KI, ſivè rectangulum ex duplâ KI, cum IL, in IL (ob arcum ALD;) erit quadratum FK, æquale differentiæ quadratorum LK, KI, & per conſequens, ſphæra orta ex revolutione ſemicirculi GSH, circa GH, æqualis erit corollæ ortæ ex revolutione ſegmenti ALDA, circa eandem GH. Id enim oſtenſum eſt ſuprà ad Lemma primum Cap. 7.

Intelligatur nunc circa eandem GH, revolvi ſemicirculus ABD. Cùm ſemicirculi ABD, GSH ſint æquales, conſtat ex Centrobaryc. rationem ſolidi orti ex revolutione ſemicirculi ABD, ad ſphæram ex revolutione ſemicirculi GSH, eandem eſſe quæ PE, ad EN. Igitur dividendo, ut PE, minus EN, hoc eſt OE, ad EN; ita ſolidum illud, minus ſphærâ, ad ſphæram. Cùm autem ſphæra oſtenſa ſit æqualis ſolido, ex revolutione ſegmenti ALDA, erit ut OE, ad EN; ita ſolidum ex revolutione ſemicirculi ADB, minus ſolido ex revolutione ſegmenti ALDA; hoc eſt, ita ſolidum ex revolutione lunulæ circa eandem GH, ad ſphæram.

Ex hoc jam conſtat, quod ſi daretur ſolidum ex revolutione lunulæ, daretur quoque circuli quadratura. Nota enim eſſet ratio OE, ad EN, & per conſequens daretur centrum gravitatis ſemicirculi, quo habito, quadraturam circuli haberi ſæpè oſtenſum eſt.

Sed pergamus. Quadratum IK, minus quadrato VK, hoc eſt quadratum GE minus quadrato EK, æquale eſt quadrato KF, ubicumque ducta intelligatur recta FKVI, parallela SO. Igitur ſolidum ex revolutione trianguli AED circa GH æquale eſt ſphæræ ex revolutione ſemicirculi circa eandem: & ratio trianguli ad ſemicirculum, eadem eſt reciprocè quæ EN ad ET. Si punctum T ſit centrum trianguli; hoc eſt ſi ET ponatur æqualis duabus tertiis EO. Ratio verò ſemicirculi ad triangulum, eadem eſt, quæ quadrantis GFS ad ES vel EO: igitur ut quadrans GFS, ad ES; ita ET, ad EN.

Cùm autem ſuprà demonſtratum ſit, ſolidum ex revolutione lunulæ circa GH ad ſphæram, eſſe in ratione OE ad EN; erit idem ſolidum ex revolutione lunulæ, ad ſolidum æquale ſphæræ, ortum ex revolutione trianguli AED, circa eandem GH, ut OE, ad EN.

Sed cùm lunula ſit æqualis triangulo; ratio ſolidorum, ex revolutione circa eandem GH genitorum, eadem etiam eſt quæ QE, ad ET. Igitur ut QE, ad ET, ita OE ad EN; & permutando ut QE, ad OE, vel ES; ita TE vel duæ tertiæ ES, ad EN.

Nunc, cùm N ſit centrum gravitatis ſemicirculi, eadem eſt ratio quadrantis SFG ad SE, quę ET vel duarum tertiarum radii ES ad EN, ut oſtenſum eſt. Igitur ut QE ad ES, ita quadrans SFG ad eandē ES. Sunt igitur æquales, recta QE, & quadrans SFG, vel AB. Quod erat. &c.

Dato itaque centro gravitatis lunulæ, datur linea recta æqualis circumferentiæ

cumferentiæ circuli exterioris ejuſdem lunulæ; quadrupla nempè ipſius QE: & per conſequens circuli quadratura ex demonſtratis ab Archimede.

Cùm ſolidum ex revolutione lunulæ circa GH oſtenſum ſit eandē rationem habere ad ſphæram ex revolutione circuli GSH circa eandem, quam habet OE ad EN, facilè colligitur dictum ſolidum eſſe ſubduplum annuli ſtricti, qui ex revolutione circuli integri DBAE circa eandem GH oriretur.

Nam idem annulus ad ſphæram, habet rationem compoſitam ex ratione circuli ad ſemicirculum, ſivè 2 ad 1, & ex ratione OE ad EN: quæ duæ rationes componunt rationem duplæ OE ad EN. Itaque ut dupla OE ad EN, ita annulus ad ſphæram. Sed ut EN, ad OE; ita ſphæra ad ſolidum ex revolutione lunulæ. Igitur, ex æquo, annulus ad ſolidum, eſt ut dupla OE, ad OE; ſivè eſt ſolidi duplus.

CAPUT X.

De Problematibus Arithmeticis.

QUæſtiones Arithmeticas magnâ ſubtilitate ſolvere ſolet Diophantus. Verùm cùm ſolis numeris utatur; facilius ſæpè ac univerſalius eaſdem ſolvi poſſe exiſtimo, ſi numerorum loco, ut à viris doctis fieri cæpit, ſpecies adhibeantur. Horum induſtriam imitatus, aliquot quæſtionum analyſim, in exemplum hic apponam.

Quæſtione 3. libri quarti Arithmeticorum proponit Diophantus,

In quadratum numerum, & in latus ejuſdem, multiplicare numerum, & facere ex latere quidem cubum, ex quadrato autem latus cubi.

Alias huic ſimiles addit ſubtiliſſimus Bachetus in Commentariis. Verùm omnes, quotquot proponi poſſunt, unicâ propoſitione & analyſi complecti licet, ut ſequitur.

In duos numeros quarumlibet poteſtatum ab eadem radice, in quibus data ſit ratio exponentium? multiplicare eundem numerum, & facere duas alias poteſtates, in ratione exponentium pariter datâ.

Antequam ad Analyſim accedam, præmitto, Multiplicationem quarumlibet poteſtatum ab eadem radice, fieri ſimplici additione exponentium. Ut ſi a^3, multiplicari debeat per a^4; additione 3 & 4, ſit a^7.

Deindè, fractionem quæ pro numeratore habet unitatem, pro denominatore autem poteſtatem quamlibet, ſi multiplicetur per quamlibet aliam poteſtatem ab eadem radice, cujus exponens major ſit exponente denominatoris; producere poteſtatem, cujus exponens eſt differentia exponentium poteſtatis multiplicantis & denominatoris. Ut ſi $\frac{1}{a^3}$ multiplicetur per a^5, fit a^2; ſi $\frac{1}{a^2}$ multiplicetur per a^6, fit a^4. &c.

At ſi exponens poteſtatis multiplicantis, minor fuerit exponente denominatoris, remanet fractio, cujus exponens, ut priùs, eſt unitas, denominator verò poteſtas, cujus exponens eſt differentia exponentiũ. Vt ſi multiplicetur $\frac{1}{a^5}$, per a^3, fit $\frac{1}{a^2}$. Si $\frac{1}{a^5}$, per a^2, fit $\frac{1}{a^3}$. &c. Hæc, ut opinor, clara ſunt leges multiplicationis intelligenti.

His ſuppoſitis, cum quæritur numerus, qui in duos numeros quarumlibet poteſtatum ab eadem radice, in ratione exponentium datà, multiplicatus; faciat duas alias poteſtates, in quibus ratio exponentiũ pariter data ſit: Evidens eſt, nihil aliud quæri, quàm numerum, qui ſivè addatur duobus numeris, quorum ratio data ſit, ſivè ab illis ſubtrahatur, ſeu illi ab ipſo; producat vel relinquat duos numeros in ratione datâ.

Omnes enim illi numeri, conſiderari poſſunt ut exponentes poteſtatum, quorum additione vel ſubtractione, ut vidimus, alii exponentes oriuntur. Vt ſi quæratur numerus, qui ductus in a^5 & a^3, ex a^5 faciat a^7, & ex a^3 faciat a^5. Patet nihil aliud quæri niſi numerum 2, qui additus 5, facit 7; additus 3, producit 5.

Numerum autem, qui, ſivè adjungatur, ſivè ſubtrahatur à duobus

bus numeris in ratione datâ, ſeu ſi ab eo ſubtrahantur ducti numeri, relinquat duos numeros in datâ ratione, facilè eſt invenire.

Sit ille numerus y, ſitque prima ratio numerorum data, eadem quæ b, ad d: alia verò, quæ poſt additionem vel ſubtractionem remanere debet, eadem quæ q, ad n.

Igitur ſi numerus y addi debeat, fiet ut $b+y$, ad $d+y$, ita q, ad n. Et æquatio $qd+qy \parallel nb+ny$. Hoc eſt $\frac{qd-nb}{n-q} \parallel y$. Vel $\frac{nb-qd}{q-n} \parallel y$.

Si ſubtrahi debeat, vel alii ab illo, fiet analogiſmus.

$$b-y / d-y / q / n.$$

Vel $$y-b / y-d / q / n.$$

Et æquationes ex utroque analogiſmo,

$$qd-qy \parallel nb-ny, \;\&\; qy-qd \parallel ny-nb,$$

$$\& \; \frac{qd-nb}{q-n} \parallel y. \text{ Vel } \frac{nb-qd}{n-q} \parallel y.$$

Conſiderando has æquationes, facilè apparet quando numerus addi debeat, quando ſubtrahi, pro variâ nimirùm ratione b & d, ad q & n: quod in exemplo clarius apparebit.

Aſſumamus ipſam quæſtionem Diophanti. Quoniam quæritur numerus qui in quadratum, & in latus ejus ductus, faciat ex latere cubum, ex quadrato latus cubi. Igitur ratio b, ad d, erit ut 2 ad 1: eadem ſcilicet quæ exponentis quadrati, ad exponentem lateris; & rurſus ratio q, ad n, erit ut 1, ad 3; nimirùm ut exponens lateris, ad exponentem cubi.

Nunc nb, majus eſt qd, & n, majus eſt q. Sumenda igitur eſt ex ſuperioribus æquationibus hæc, $\frac{nb-qd}{n-q} \parallel y$, quæ in numeris facit $\frac{6-1}{2} \parallel y$, ſivè $\frac{5}{2} \parallel y$.

At cùm y, debeat eſſe numerus integer, ſequitur capiendos eſſe numeros majores exprimentes rationem b, ad d; exempli gratiâ, hos 4 ad 2: ut fiat æquatio $\frac{10}{2} \parallel y$. Sivè $5 \parallel y$.

Deindè fiant duæ fractiones, quarum denominatores ſint a^4 & a^2, numerator unitas: & ſint $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^2}$. Fractiones autem fieri oportere indicat æquatio quam conſtruimus, cùm orta ſit ex ſubtractione.

 Tum

Tum ſumatur a^5, nimirùm quinta poteſtas ejuſdem radicis a, cum inventa ſit æqualis 5. Dico ſic ſatisfieri propoſito.

Nam $\frac{1}{a^4}$ eſt quadratum cujus latus eſt $\frac{1}{a^2}$. Et ſi a^5 ducatur in $\frac{1}{a^4}$, remanet a, ſi in $\frac{1}{a^2}$ remaneret a^3: latus ſcilicet & cubus ab eodem, ut proponebatur.

In numeris, ſumatur pro a quilibet numerus ut 3; erit a^2, 9, a^4, 81 a^5, 243. Itaque numeri quæſiti erunt $\frac{1}{81}$ $\frac{1}{9}$, quadratum & ejus latus. Numerus multiplicans 243, qui ductus in $\frac{1}{81}$ dat 3; in $\frac{1}{9}$ dat 27: latus ſcilicet, & cubnm ab eodem.

Pergamus in exemplis Bacheti; & ducendus ſit numerus in quadratum, & latus, ut ex quadrato fiat cubus, ex latere, latus cubi. Sic ſtabit operatio

$$\begin{matrix} 2. & 1. & 3. & 1. \\ b. & d. & q. & n. \end{matrix}$$

Et cùm qd, majus ſit nb, ſumenda erit æquatio orta pariter ex ſubtractione.

$$\frac{qd-nb}{q-n} \parallel y, \text{ ſive } \tfrac{1}{2} \parallel y.$$

Et quoniam y debet eſſe numerus integer, ſumtis pro 2 & 1, aliis in eadem ratione, ut 4 & 2; fiet $\frac{2}{2}$ ſivè 1 $\parallel y$.

Itaque rurſus faciendo duas fractiones, $\frac{1}{a^4}$ & $\frac{1}{a^2}$ quæ ſunt quadratum & latus, eaſque multiplicando per a, cum y ſit æqualis unitati, fit ex primâ $\frac{1}{a^3}$, ex alterâ $\frac{1}{a}$, cubus ſcilicet & latus ejuſdem.

Sit a, 2. erit a^2, 4; & a^4, 16. Itaque $\frac{1}{16}$ & $\frac{1}{4}$, erunt quadratum & latus; & ſi multiplicentur per 2; dabunt $\frac{2}{16}$, & $\frac{2}{4}$; ſivè $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{2}$, cubum ſcilicet, & ejus latus.

Quæratur nunc cubus & latus: & numerus qui ex cubo faciat quadrato-quadratum, & ex latere latus ejuſdem.

Erit itaque $\begin{matrix} 3. & 1. & 4. & 1. \\ b. & d. & q. & n. \end{matrix}$ Et rurſus eadem æquatio $\frac{qd-nd}{q-n} \parallel y$.

Igitur y erit $\tfrac{1}{3}$. Itaque ad tollendam fractionem, pro 3 & 1 ſumendo

in

in eadem ratione 9 & 3, fiet $\frac{3}{3}$ ſivè 1 $\|$ y.

Unde termini analytici ſunt $\frac{1}{a^9}$, $\frac{1}{a^3}$ & a; quibus numeri applicari poſſunt, ut prius. Hi ſcilicet, ſi a ſupponatur eſſe 2, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{8}$, 2.

Ultima quæſtio Bacheti eſt; Ex cubo & latere, per multiplicationem ab eodem numero, facere ex hoc quadrato-quadratum, ex illo latus quadrato-quadrati.

Sunt itaque exponentes $\begin{matrix} 3. & 1. & 1. & 4. \\ b. & d. & q. & n. \end{matrix}$ & æquatio $\frac{nb - qd}{n - q}$ ſivè $\frac{11}{3} \| y$.

Hoc eſt, pro 3, & 1, ſumendo 9, & 3. $\frac{33}{3}$ ſivè 11 $\|$ y.

Termini itaque analytici erunt $\frac{1}{a^9}$, $\frac{1}{a^3}$ & a^{11}.

Et ſi pro a ponatur 2, fient numeri $\frac{1}{512}$ $\frac{1}{8}$, 2048, qui propoſito ſatisfaciunt, & quos etiam invenit Bachetus.

Ex his evidens eſt quæſtionem quam propoſuimus, non ſolùm univerſaliter, ſed etiam indefinitè ſolutam dici poſſe, cùm pro a, quilibet numerus ſtatui queat.

Quæſtione 44. lib. 4. proponitur à Diophanto.

Invenire tres numeros, ut compoſitus ex tribus, multiplicatus in primum, faciat triangulum; in ſecundum, faciat quadratum; in tertium faciat cubum.

Solvit autem quæſtionem longiore circuitu, quæ tamen habet hanc breviſſimam analyſim.

Summa numerorum quæſitorum ſit a: & ſumatur quilibet numerus triangularis q, quilibet cubus z^3, & quilibet quadratus bb, qui ſinguli applicati ad a, & ſimul additi faciant

$$\frac{q}{a} + \frac{z^3}{a} + \frac{bb}{a}.$$

Igitur, ex hypotheſi quæſtionis, erit æquatio $\frac{q}{a} + \frac{z^3}{a} + \| a$ ſivè $q + z^3 + bb \| aa$.

Eò itaque

Eò itaque devolvitur quæſtio, ut inveniendi ſint tres numeri, quorum unus ſit triangularis, alter cubus, tertius quadratus; qui ſimul juncti faciant quadratum. Vel ſuppoſitis ad libitum q, & z^3, eò res deducitur, ut quærendus ſit quadratus, qui cum q, & z^3 faciat quadratum. Quod quidem facilè eſt.

Fingatur quadratum ex b, & qualibet n, cujus tamen quadratum non ſit majus $q + z^3$, ut fiat æquatio

$$q + z^3 + bb \parallel bb + 2bn + nn. \text{ Sivè } \frac{q + z^3 - nn}{2n} \parallel b.$$

Quoniam igitur q, z^3, & n, ſumuntur ad libitum, datur b: & per conſequens $q + z^3 + bb$, qui numerus cùm ſit quadratus, & æqualis aa, datur a.

Applicemus numeros. Sit q, 3. z^3, 8. Erit $q + z^3$, 11. Auferatur ab 11, nn, ſivè quilibet quadratus vt 1; reſiduum applicetur ad duplum lateris ejuſdem quadrati, ſivè ad 2; fiet $\frac{10}{2}$ ſivè $5 \parallel b$. Et $bb \parallel$ 25. Igitur $q + z^3 + bb \parallel 36$, numerus quadratus, cujus latus 6. Itaque a, erit 6, & $\frac{q}{a} + \frac{z^3}{a} + \frac{bb}{a}$, erit $\frac{3}{6} + \frac{8}{6} + \frac{25}{6}$. Qui quidem ſunt numeri quæſiti, cùm ſimul additi faciant $\frac{36}{6}$, ſivè 6; & ducti in 6, dent triangulum, cubum, & quadratum, ut proponebatur.

Evidens eſt hanc Analyſim extendi ad quoſlibet polygonos & poteſtates, nec opus eſſe, ut iis adnumeretur triangulus, & quadratus, quemadmodum doctiſſimus Bachetus exiſtimat. Sed ſufficere ſi ſit inter illos quadratus. Exempli gratiâ; propoſitum ſit invenire quinque numeros, ut ſumma ipſorum ducta in primum, faciat hexagonum; in ſecundum, pentagonum; in tertium, quadrato-quadratum; in quartum, cubum; in quintum, quadratum. Hexagonus, ſit q; pentagonus, p; quadrato-quadratus d^4; cubus, z^3; quadratus bb; omnes aſſumti ad libitum præter bb. Eodem artificio inveniemus,

$$\frac{q + p + d^4 + z^3 - nn}{2n} \parallel b.$$

Sumtâ nimirùm n ad libitum, dummodò ejus quadratum à reliquorum ſummâ auferri poſſit. Dabitur igitur b, & ex b, ut prius, a.

In numeris, ſit q, 6; p, 5; d^4 16; z^3 1; n 2.

Erit

Erit $\frac{q + p + d^4 + z^2 - nn}{2n}$ || $\frac{24}{4}$ ſivè 6.

Igitur b, erit 6, & bb, 36. Qui numerus additus $q + p + d^4 + z^2$, ſivè 28, dat 64, pro aa. Itaque a eſt 8, & numeri quæſiti ſunt,

$$\frac{6}{8}.\quad \frac{5}{8}.\quad \frac{16}{8}.\quad \frac{1}{8}.\quad \frac{36}{8}.$$

Qui ſimul juncti faciunt $\frac{64}{8}$; ſivè 8; & ſinguli ducti in 8 abſolvunt propoſitum.

Evidens eſt etiam opus non eſſe, ut compoſitus ex omnibus ſit quadratus, cùm in exemplis ſuprà adductis pro illo habuerimus, 6, & 8. Id quidem ſequitur ex vi Analyſis Diophanteæ; ut notavit Bachetus; non tamen ex vi quæſtionis. Verùm, nequid diſsimilem, facilè adducor ut credam, textum Diophanti eſſe corruptum; & ex ejus mente ſic formandam quæſtionem,

Invenire tres numeros ut compoſitus ex tribus ſit quadratus & multiplicatus, &c.

Alienum enim eſſet ab ejus ſubtilitate rem facilem tanto molimine quæſiviſſe. Sic autem formatâ quæſtione, ſubtiliſſima eſt Diophanti analyſis, & locum habent quæ doctiſsimus Bachetus adnotavit.

Proponatur nunc

Invenire tres numeros, ut quem bini mutuâ multiplicatione producunt, multatus dato numero, faciat quadratum.

Eſt 13.ª lib. 3.ª Arithmeticorum, quam Analyſi univerſaliore inveſtigabimus.

Primus numerorum quæſitorum ſit a. Numerus datus z.

Ponatur, quod fit ex multiplicatione primi in ſecundum, $aa + z$, ut detracto z, remaneat aa quadratus. Igitur ſecundus erit $a + \frac{z}{a}$.

Eâdem ratione, productus ex primo in tertium, ſtatui poterit $\frac{yy}{xx} aa + z$; ut detracto z remaneat quadratus $\frac{yyaa}{xx}$. Undè tertius erit $\frac{yya}{xx} + \frac{z}{a}$.

Supereſt nunc, ut productus ex ſecundo in tertium, ſivè ex $a + \frac{z}{a}$, in $\frac{yya}{xx} + \frac{z}{a}$, ſit quadratus detracto z. Eſt autem,

$$\frac{yyaa}{xx} + \frac{yyz}{xx} + z + \frac{zz}{aa}.$$ Igitur, detracto z,

$\frac{yyaa}{xx} + \frac{yyz}{xx} + \frac{zz}{aa}$, æquabitur quadrato.

Fingatur quadratum à latere $\frac{ya}{x} + \frac{z}{a}$, & æquetur alteri. Itaque erit

æquatio $\frac{yyaa}{xx} + \frac{yyz}{xx} + \frac{zz}{aa} \parallel \frac{yyaa}{xx} + \frac{2yz}{x} + \frac{zz}{aa}$ Hoc eſt

ablatis æqualibus, & ductis omnibus in x, $\frac{yyz}{x}$, $\parallel 2zy$, ſivè $\frac{y}{x} \parallel 2$.

Igitur $\frac{yy}{xx}$ erit 4. Et per conſequens tertius numerus erit $4a + \frac{z}{a}$

Soluta itaque eſt quæſtio indefinitè. Pro a enim quilibet numerus aſſumi poteſt, ut patet.

In numeris ſit z, 6. Pro a, accipiatur quilibet numerus, ut 2. Fiet primus 2; ſecundus $2 + \frac{6}{2}$ ſivè 5; tertius $8 + \frac{6}{2}$ ſivè 11. Qui ſatisfaciunt propoſito.

Si quærerentur tres numeri, qui idem facerent, non detracto, ſed addito quolibet numero z; eodem artificio invenirentur in terminis analyticis, hi; a / $a - \frac{z}{a}$ / $4a - \frac{z}{a}$. Eſſetque ſoluta quæſtio, ſed non indefinitè. Pro a enim numerus accipiendus foret, qui major eſſet $\frac{z}{a}$, ut patet.

Quomodò autem hæc quoque indefinitè ſolvenda ſit, id Diophantum ignoraſſe ſuſpicatur Bachetus, ad 20. lib.4. Eam autem ſolvit ipſe, ope Canonum quos invenit, & qui ad hanc valdè utiles ſunt.

Videamus tamen an non etiam abſque illis, ſuperiori artificio ſolvi poſſit.

Evidens eſt, rationem cur prior indefinitè ſoluta ſit, non autem poſterior, hanc eſſe; quod in illa $\frac{z}{a}$ afficiatur ſigno +, in hoc ſigno −.

Itaque

Itaque ita diſponendi erunt termini analytici, ut in hac quoque omnia ſigna ſint affirmativa.

Subſtrahatur z à quolibet quadrato, ut bb; ſitque reſiduum, d. Itaque $z + d$, æquabitur bb. Tum ponatur primus ex numeris quæſitis a. Productus ex primo in ſecundum, $aa + 2ba + d$; ut addito z fiat $aa + 2ba + d + z$; ſivè $aa + 2ba + bb$, quadratus à latere $a + b$. Erit igitur ſecundus $a + 2b + \frac{d}{a}$.

Eadem ratione ſtatui poterit tertius $\frac{yya}{xx} + \frac{2by}{x} + \frac{d}{a}$. Evidens eſt enim productum ex primo in tertium, addito z, fore quadratum.

Supereſt itaque, ut idem accidat producto ex ſecundo in tertium. Eſt ille $\frac{yyaa}{xx} + \frac{2yba}{x} + d + \frac{2byya}{xx} + \frac{4bby}{x} + \frac{2bd}{a} + \frac{2dby}{xa} + \frac{dyy}{xx} + \frac{dd}{aa}$

Addatur z; ſivè loco d ponatur bb: hoc enim idem ex hypotheſi; & fingatur quadratum à latere $\frac{ya}{x} + \frac{yb}{x} + b + \frac{d}{a}$.

Erit igitur æquatio,

$$\frac{yyaa}{xx} + \frac{2yba}{x} + bb + \frac{2byya}{xx} + \frac{4bby}{x} + \frac{2bd}{a} + \frac{2dby}{xa} + \frac{dyy}{xx} + \frac{dd}{aa} = \frac{yyaa}{xx} + \frac{yybb}{xx} + bb + \frac{dd}{aa} + \frac{2yyba}{xx} + \frac{2yba}{x} + \frac{2dy}{x} + \frac{2ybb}{x} + \frac{2ybd}{xa} + \frac{2bd}{a}.$$

Hoc eſt ablatis æqualibus, $\frac{2bby}{x} + \frac{dyy}{xx} = \frac{bbyy}{xx} + \frac{2dy}{x}$.

Subſtituatur loco bb, ejus valor $d + z$. Fiet

$$\frac{2dy}{x} + \frac{2zy}{x} + \frac{dyy}{xx} = \frac{dyy}{xx} + \frac{zyy}{xx} + \frac{2dy}{x}$$

Sivè ablatis rurſus æqualibus, & ducto reſiduo in x, & applicato ad yz, $2 = \frac{y}{x}$.

Itaque ut prius, $\frac{yy}{xx}$ erit 4; & tertius numerus, $4a + 4b + \frac{d}{a}$. Et ſoluta eſt quæſtio indefinitè, cùm pro a quilibet numerus ſtatui poſsit.

In numeris ſit z, 8: bb, 9. Igitur d, erit 1; & b, 3. Sumatur pro a, quilibet numerus, ut 4 erunt numeri quæſiti,

$a \parallel 4.$

$a + 2b + \frac{d}{a} \parallel 10\frac{1}{4}$

$4a + 4b + \frac{d}{a} \parallel 28\frac{1}{4}$

qui ſatisfaciunt propoſito. Productus enim à primo in ſecundum, addito 8, eſt 49. ex primo in tertium 121: ex ſecundo in eundē 297$\frac{9}{16}$. quadrati à lateribus 7. 11. & 17$\frac{1}{4}$.

Addamus huic Analyſim 36 quæſtionis libri 4. propter operationis ſimilitudinem.

Invenire duos numeros, ut ſi alter ab altero eandem partem ſivè eaſdem partes acceperit, ratio ad reliquum ſit ea quæ poſcitur.

Sint numeri quæſiti a, & e. Pars vel partes aſſumendæ, exprimi intelligantur hâc fractione $\frac{y}{x}$. Ratio data primi numeri aſſumtâ parte vel partibus ſecundi, ad reſiduum ſecundi, ſit q, ad z. Ratio data ſecundi, aſſumtâ eâdem parte vel partibus primi, ad reſiduum ejuſdem, ſit n, ad z.

Erunt itaque duo Analogiſmi

$$a + \frac{ye}{x} / e - \frac{ye}{x} / q / z.$$

& $$e + \frac{ya}{x} / a - \frac{ya}{x} / n / z.$$

Fient itaque duæ æquationes,

$$qe - \frac{qye}{x} \parallel za + \frac{zye}{x}. \quad \text{Et} \quad na - \frac{nya}{x} \parallel ze + \frac{zya}{x}.$$

Sivè ductis omnibus in x,

$$qxe - qye \parallel zxa + zye. \quad \text{Et} \quad nxa - nya \parallel zxe + zya.$$

Et factâ metatheſi,

$$qxe - qye - zye \parallel zxa. \quad \text{Et} \quad nxa - nya - zya \parallel zxe.$$

Et jungendo ſimul utramque æquationem, habebitur nova,

$$qxe - qye - zye + zxe \parallel nxa - nya - zya + zxa.$$

Quæ

Quæ æquatio diviſa per $x - y$, reliquit

$$qe + ze \parallel na + za.$$

Erit igitur ut $q + z$, ad $n + z$, ita a, ad e. Itaque inventa eſt ratio numerorum quæſitorum.

Nunc ad reperiendam fractionem, ſivè partem aut partes aſſumendas; in unâ priorum æquationum, loco a, vel e, ſubſtituatur ejus valor, nempè pro a, $\frac{qe + ze}{n + z}$ vel pro e, $\frac{na + za}{q + z}$

$zxa \parallel qxe - qye - zye$. Pro a, poſito in ejus valore, fiet

$$\frac{zxqe + zzxe}{n + z} \parallel qxe - qye - zye.$$

Et ablatâ e, omnibus equationis partibus communi, ductisque in $n + z$

$$zqx + zzx \parallel nqx + zqx - nqy - zqy - nzy - zzy.$$

Sivè ablatis æqualibus, & factâ metatheſi

$$nqy + zqy + nzy + zzy \parallel nqx - zzx.$$

Erit igitur, ut y, ad x; ita $nq - zz$, ad $nq + zq + nz + zz$.

Æquales itaque erunt hæ fractiones $\frac{y}{x}$, & $\frac{nq - zz}{nq + zq + nz + zz}$

Dantur igitur pars vel partes aſſumendæ; & apparet inſuper quomodò poſſit formari Canon univerſalis ad ſolutionem Problematis.

Cùm enim dati ſint termini q & z, & n & z, datur ratio numerorũ, cùm quilibet aſſumi poſſint in ratione $q + z$, ad $n + z$.

Fractio verò, quæ partes aſſumendas indicat, habet pro denominatore $qn - zz$ ſivè productum ex primis terminis rationum datarum, minus producto ex ſecundis. Pro denominatore verò, productum ex $q + z$, in $n + z$, ſivè ex aggregato terminorum Obſervandum eſt duntaxat ut termini rationum datarum reducantur ad eundem cõſequentem, ut hic factum eſt, cùm utrobique ultimus terminus ſit z.

In numeris, ſit q, 3. z, 1. n, 5. ut in exemplo Diophanti. $q + z$ eſt 4. $n + z$, 6. Sunt numeri quæſiti 4, & 6; vel quilibet alii in eadẽ ratione. $qn - zz$ eſt 14; productum ex $n + z$, in $q + z$, 24. Partes igitur aſſumendæ ſunt $\frac{14}{24}$, vel $\frac{7}{12}$. Et ſatisfit propoſito.

Sed hæc ſpeciminis loco ſufficiant.

FINIS.

Ut *vitiis nemo ſine naſcitur*, ita vix è prælo liber exit abſque erratis. In utroque genere, *Optimus ille eſt qui minimis urgetur*. Graviora itaque ſuſtuliſſe contenti, cætera benevolentiæ tuæ reliquimus.

Pag.	*Lin.*	*Pro*	*Lege*
12	4	G X	G K
14	ultimâ	ad rectam	rectam
16	31	A F	E F
23 & 73	in figurâ	G P P	pone G P R
31	in figurâ		prope O ponatur S
34	in figurâ	D	pone T
36	14	I	in F
45	2	H S	K S
52	18	$\| aa + \frac{bda}{q}$	$\| aa - \frac{bda}{q}$
55	2	$\| \frac{bbee}{qq} + aa + \frac{bbd}{q}$	$\| \frac{bbee}{qq} + aa + \frac{2bbd}{q}$
62	26	I K	I H
63	15	$-ee$	$+ee$
68	17. 18. & 19.		Pro *r* in terminis analyticis pone *z*
83	23	$da + aa$	$da - aa$
84	8	propoſitionem	propoſitionis
89	6	$bb + baa \| ee$	$bb + ba \| ee$
91	25	$qqyy + bnqy - ba^3$	$qqyy + bnqy - bbqy - ba^3$
105	antepenul.	tangens	& tangens
106	24	habeat	habeatur
108	20	parabola	ſemiparabola
116	5	ſi	ſit
121	14	$2qyzz$	$2byzz$
	19	$+3bbyy$	$-3bbyy$
122	6	poſt C G P	adde, in P
	16	H A B	H A G
	29	$6by$	$-6by$
128	6	$bz - zyy + 2yy$	$bz - zy + 2yy$
	in eâdem	poſt zby; ſi ita	zby; ita
	24	$\frac{1}{6}zz$	$\frac{1}{16}zz$
138	28	E B G F	E B G E
140	6	hoc	hæc
145	34	ad quem	ad quam
148	9	C B	A B
	17	duplum	duplam
150	3	ex	eſt
156	1	cujus	ejus
157	4	*z*	Z
161	29	tertiam	tertiam partem
166	2	$\frac{3}{2}ba$	$\frac{3}{2}b - a$

00052064

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 25 June, 2016